8. přednáška, 15. 4. 2024

14.3. Odchylka vektorů

Pro nenulové vektory u, v můžeme Cauchyho–Buňakovského–Schwarzovu nerovnost zapsat ve tvaru

$$\frac{|(u,v)|}{\|u\|\|v\|} \leq 1$$

a v eukleidovském případě

$$-1 \leq \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|} \leq 1.$$

Funkce cos zúžená na interval $[0,\pi]$ je injektivní a tento interval zobrazuje vzájemně jednoznačně na interval $[-1,1]$. Pro každou dvojici nenulových vektorů u, v tedy existuje právě jedno reálné číslo $\varphi \in [0,\pi]$ takové, že

$$\cos\varphi = \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|}.$$

Definice 14.3.1. Buďte V eukleidovský prostor a $u, v \in V$ nenulové. *Odchylka* vektorů u, v (nebo *úhel* mezi vektory u, v) je (jediné) číslo $\varphi \in [0,\pi]$ takové, že

$$\cos\varphi = \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|}.$$

Pro libovolný eukleidovský skalární součin tedy platí

$$(u,v) = \|u\|\|v\|\cos\varphi.$$

Tvrzení 14.3.1 (Kosinová věta)**.** *Buďte V eukleidovský prostor, $u, v \in V$ nenulové a φ úhel mezi nimi. Potom*

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\varphi.$$

Důkaz.

$$\|u-v\|^2 = (u-v, u-v) = (u,u) - 2(u,v) + (v,v) =$$
$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\varphi.$$ □

14.4. Ortogonalita (kolmost)

Definice 14.4.1. Buď V prostor se skalárním součinem. Vektory $u, v \in V$ jsou *kolmé* (nebo *ortogonální*), jestliže $(u,v) = 0$. Zapisujeme $u \perp v$.

Dva vektory jsou tedy kolmé právě tehdy, když jejich odchylka je $\pi/2$.

Díky tomu, že $(u,v) = \overline{(v,u)}$, kolmost vektorů nezávisí na jejich pořadí. Jelikož pro každý vektor $v \in V$ platí $(v,0) = 0$, nulový vektor je kolmý ke každému vektoru. Z toho, že $(pu, qv) = p\overline{q}(u,v)$ pro každé $p, q \in P$, vyplývá, že libovolné skalární násobky kolmých vektorů jsou také kolmé.

Definice 14.4.2. Buď V prostor se skalárním součinem. Množina $U \subset V$ je *ortogonální*, jestliže $u \perp v$ pro libovolné různé $u, v \in U$. Ortogonální množina normovaných vektorů je *ortonormální*.

Když v ortogonální množině nenulových vektorů každý vektor vynásobíme převrácenou hodnotou jeho délky (každý vektor znormujeme), dostaneme ortonormální množinu.

Tvrzení 14.4.1. *Každá ortogonální množina nenulových vektorů je lineárně nezávislá.*

Důkaz. Buď $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortogonální množina nenulových vektorů. Nechť

$$p_1 v_1 + \dots + p_n v_n = 0.$$

Když pro libovolné $i \in \{1, \dots, n\}$ obě strany této rovnosti skalárně vynásobíme zprava vektorem v_i, dostaneme

$$\begin{aligned} (p_1 v_1 + \dots + p_n v_n, v_i) &= (0, v_i) \\ p_1(v_1, v_i) + \dots + p_n(v_n, v_i) &= 0 && \text{(linearita v prvním argumentu)} \\ p_i(v_i, v_i) &= 0 && \text{(kolmost)} \\ p_i &= 0 && (v_i \neq 0 \text{ a } (v_i, v_i) > 0). \end{aligned}$$

Takže $p_i = 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá. □

Důsledek. *Každá n-prvková ortogonální množina nenulových vektorů v n-rozměrném prostoru je báze tohoto prostoru.*

Příklad. (1) Mějme $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem. Kanonická báze je ortonormální.

(2) Mějme prostor všech spojitých reálných funkcí na intervalu $[0, 2\pi]$ se skalárním součinem

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) \mathrm{d}x.$$

Množina $\{1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \dots\}$ je ortogonální. □

Tvrzení 14.4.2 (Pythagorova věta). *Buďte V prostor se skalárním součinem a $u, v \in V$ kolmé. Pak*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v, u + v) = \\ &= (u, u) + (u, v) + (v, u) + (v, v) = && (u \perp v) \\ &= (u, u) + (v, v) = \|u\|^2 + \|v\|^2. \end{aligned}$$

□

Cvičení. Buď $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortogonální množina. Ukažte, že

$$\|v_1 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \dots + \|v_n\|^2.$$

□

14.5. Souřadnice vzhledem k ortonormální bázi

Tvrzení 14.5.1. *Nechť V je prostor se skalárním součinem, $(e_1, \dots, e_n)$ jeho báze a $v \in V$. Je-li $(e_1, \dots, e_n)$ ortogonální báze, pak*

$$v = \frac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \dots + \frac{(v, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n,$$

čili i-tá souřadnice vektoru v vzhledem k uvedené bázi je

$$x^i = \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} = \frac{(v, e_i)}{\|e_i\|^2}.$$

Je-li $(e_1, \dots, e_n)$ *navíc ortonormální báze, pak*

$$v = (v, e_1)e_1 + \dots + (v, e_n)e_n,$$

čili i-tá souřadnice vektoru v vzhledem k uvedené bázi je

$$x^i = (v, e_i).$$

Důkaz. Buď $(e_1, \dots, e_n)$ ortogonální báze. Nechť $v = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$. Obě strany vynásobíme zprava vektorem e_i s $i \in \{1, \dots, n\}$. Dostaneme

$$\begin{aligned}(v, e_i) &= (x^1 e_1 + \dots + x^n e_n, e_i) = \\ &= x^1(e_1, e_i) + \dots + x^n(e_n, e_i) = \\ &= x^i(e_i, e_i).\end{aligned}$$

Bázové vektory jsou nenulové, takže (e_i, e_i) je nenulové a $x^i = \frac{(v,e_i)}{(e_i,e_i)} = \frac{(v,e_i)}{\|e_i\|^2}$.

Pokud $(e_1, \dots, e_n)$ je ortonormální báze, pak zřejmě $x^i = (v, e_i)$. □

Tvrzení 14.5.2. *Nechť V je prostor se skalárním součinem,* $(e_1, \dots, e_n)$ *jeho ortonormální báze,* $u, v \in V$, $x = (x^1, \dots, x^n)$ *souřadnice vektoru u a* $y = (y^1, \dots, y^n)$ *souřadnice vektoru v vzhledem k uvedené bázi. Potom*

$$(u, v) = x^T \overline{y} = x^1 \overline{y^1} + \dots + x^n \overline{y^n}.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}(u, v) &= \left(\sum_{i=1}^n x^i e_i, \sum_{i=1}^n y^i e_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x^i e_i, y^j e_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i \overline{y^j} (e_i, e_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n x^i \overline{y^i}.\end{aligned}$$ □

14.6. Kolmost množin

Definice 14.6.1. Buď V prostor se skalárním součinem, $v \in V$ a $M, N \subseteq V$. Vektor v je *kolmý na množinu* M, jestliže v je kolmý na každý vektor z M, zapisujeme $v \perp M$. Množina M je *kolmá na množinu* N, jestliže každý vektor množiny M je kolmý na každý vektor množiny N, zapisujeme $M \perp N$.

Cvičení. V průniku kolmých množin může být jen nulový vektor. □

Například, dvě roviny v $\mathbb{R}^3$ nejsou vzájemně kolmé.

Tvrzení 14.6.1. *Buď V prostor se skalárním součinem a* $M, N \subseteq V$. *Potom* $M \perp N$ *právě tehdy, když* $[\![M]\!] \perp N$, *a to je právě tehdy, když* $[\![M]\!] \perp [\![N]\!]$.

Důkaz. Předpokládejme, že $M \perp N$. Buď $u \in [\![M]\!]$ a $v \in N$, čili $u = p^1 u_1 + \cdots + p^n u_n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, skaláry $p^1, \ldots, p^n$ a vektory $u_1, \ldots, u_n \in M$. Potom

$$\begin{aligned}(u, v) &= (p^1 u_1 + \cdots + p^n u_n, v) = \\ &= p^1(u_1, v) + \cdots + p^n(u_n, v) = 0.\end{aligned}$$

Takže $[\![M]\!] \perp N$.
Opačná implikace a druhá ekvivalence jsou zřejmé. □

Chceme-li ověřit, zda vektor $v \in V$ je kolmý na podprostor $U \subseteq V$, díky předcházejícímu tvrzení stačí ověřit, zda vektor v je kolmý na všechny vektory z libovolné množiny generátorů podprostoru U.

14.7. Ortogonální doplněk

Definice 14.7.1. Nechť V je prostor se skalárním součinem a $U \subseteq V$. *Ortogonální doplněk* $U^{\perp}$ množiny U je množina všech vektorů z V kolmých na každý vektor z U, tedy

$$U^{\perp} = \{v \in V |\ v \perp u \text{ pro všechna } u \in U\}.$$

Množina $U^{\perp}$ je tedy největší množina kolmá na U.

Tvrzení 14.7.1. *Buď V prostor se skalárním součinem, $U, U_1, U_2 \subseteq V$. Pak*

(1) jestliže $U_1 \subseteq U_2$, pak $U_2^{\perp} \subseteq U_1^{\perp}$,
(2) $U^{\perp} = [\![U]\!]^{\perp}$,
(3) $U^{\perp}$ je podprostor V.

Důkaz. (1) Je-li $U_1 \subseteq U_2$ a $v \in U_2^{\perp}$, tedy $v \perp U_2$, potom $v \perp U_1$ a $v \in U_1^{\perp}$.
(2) Pro $v \in V$ podle Tvrzení 14.6.1 $v \in U^{\perp}$ právě tehdy, když $v \in [\![U]\!]^{\perp}$.
(3) Zřejmě $0 \in U^{\perp}$. Pro libovolné $v_1, v_2 \in U^{\perp}$ a $u \in U$ platí $(v_1 + v_2, u) = (v_1, u) + (v_2, u) = 0$, takže $v_1 + v_2 \in U^{\perp}$. Pro libovolný skalár p, $v \in U^{\perp}$ a $u \in U$ platí $(pv, u) = p(v, u) = 0$, takže $pv \in U^{\perp}$. □

14.8. Ortogonální projekce

Definice 14.8.1. Buď V prostor se skalárním součinem, $v \in V$ a U podprostor V. Vektor $u \in U$ je *ortogonální projekce (kolmý průmět) vektoru v do podprostoru U*, jestliže $(v - u) \perp U$, tedy $v - u \in U^{\perp}$. Označujeme $u = v_U$ nebo $u = \mathrm{pr}_U(v)$.

Z definice vyplývá, že je-li $v \in U$, potom $v_U = v$.

Tvrzení 14.8.1. *Buď V prostor se skalárním součinem, U podprostor V a $v \in V$. Pak pro každý vektor $u \in U$, $u \neq v_U$, platí*

$$\|v - v_U\| < \|v - u\|.$$

Ortogonální projekce vektoru do podprostoru je určena jednoznačně, pokud existuje.

Důkaz. Podle definice $v_U \in U$ a $(v - v_U) \perp U$, takže pro každé $u \in U$ platí $(v - v_U) \perp (v_U - u)$. Pro $u \neq v_U$ navíc

$$\begin{aligned} \|v - v_U\|^2 &< && (\|v_U - u\| > 0) \\ &< \|v - v_U\|^2 + \|v_U - u\|^2 = && \text{(Pythagorova věta)} \\ &= \|(v - v_U) + (v_U - u)\|^2 = \\ &= \|v - u\|^2. \end{aligned}$$

Nechť $u_1, u_2 \in U$ jsou ortogonální projekce vektoru v do podprostoru U. Předpokládejme, že $u_1 \neq u_2$. Potom podle právě dokázaného

$$\|v - u_1\| < \|v - u_2\| \quad \text{a zároveň} \quad \|v - u_2\| < \|v - u_1\|.$$

Dostáváme spor, takže $u_1 = u_2$ a ortogonální projekce je tedy určena jednoznačně. □

Tvrzení 14.8.2. *Buďte V prostor se skalárním součinem, U jeho konečněrozměrný podprostor a $(e_1, \dots, e_m)$ ortogonální báze podprostoru U. Pak pro každé $v \in V$ platí*

$$\mathrm{pr}_U(v) = \frac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \dots + \frac{(v, e_m)}{(e_m, e_m)} e_m.$$

Je-li $(e_1, \dots, e_m)$ navíc ortonormální báze, pak

$$\mathrm{pr}_U(v) = (v, e_1)e_1 + \dots + (v, e_m)e_m.$$

Důkaz. Vektor $u = u^1 e_1 + \dots + u^m e_m \in U$ je ortogonální projekce vektoru v do podprostoru $U = [\![e_1, \dots, e_m]\!]$ právě tehdy, když vektor $v - u$ je kolmý ke každému vektoru z U, což je právě tehdy, když $v - u$ je kolmý ke každému e_i, to je právě tehdy, když pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned} 0 &= (v - u, e_i) = (v, e_i) - (u, e_i) = \\ &= (v, e_i) - (u^1 e_1 + \dots + u^m e_m, e_i) = \\ &= (v, e_i) - u^1 (e_1, e_i) - \dots - u^m (e_m, e_i) = \\ &= (v, e_i) - u^i (e_i, e_i) \end{aligned}$$

a to je právě tehdy, když $u^i = \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)}$, jelikož $(e_i, e_i) \neq 0$.

Pokud $(e_1, \dots, e_n)$ je ortonormální báze, pak zřejmě $u^i = (v, e_i)$. □

14.9. Gramova-Schmidtova ortogonalizace

Tvrzení 14.9.1. *V každém konečněrozměrném vektorovém prostoru se skalárním součinem existuje ortonormální báze.*

Důkaz. Existenci ortonormální báze dokážeme pomocí *Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace.*

Buďte V konečněrozměrný prostor se skalárním součinem a $(v_1, \dots, v_n)$ jeho báze. Ukažme, že existuje jeho ortogonální báze.

(1) Položme $e_1 = v_1$. Potom vektor e_1 je nenulový, $\{e_1\}$ je lineárně nezávislá množina a $[\![e_1]\!] = [\![v_1]\!]$.

(2) Postupně pro $k = 1, \dots, n-1$ předpokládejme, že máme $\{e_1, \dots, e_k\}$ ortogonální množinu nenulových vektorů (tedy lineárně nezávislou množinu) takovou, že $[\![e_1, \dots, e_k]\!] = [\![v_1, \dots, v_k]\!]$. Označme $U_k = [\![e_1, \dots, e_k]\!]$. Vektor e_{k+1} získáme tak, že od vektoru v_{k+1} odečteme jeho ortogonální projekci do podprostoru U_k. Tedy

$$e_{k+1} = v_{k+1} - \mathrm{pr}_{U_k}(v_{k+1}) = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(v_{k+1}, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i.$$

Podle definice ortogonální projekce vektor e_{k+1} je kolmý na U_k, tedy na všechny vektory z U_k, včetně $e_1, \dots, e_k$. Množina $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$ je tedy ortogonální.

Jelikož báze je lineárně nezávislá, vektor v_{k+1} není prvkem podprostoru U_k a nerovná se tedy své ortogonální projekci $\mathrm{pr}_{U_k}(v_{k+1})$ do tohoto podprostoru. Proto e_{k+1} je nenulový vektor a množina $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$ je lineárně nezávislá.

K tomu, $[\![e_1, \dots, e_{k+1}]\!] = [\![v_1, \dots, v_{k+1}]\!]$. Platí $e_1 = v_1$ a e_i, $i \in \{2, \dots, k+1\}$, je lineární kombinace vektorů $e_1, \dots, e_{i-1}, v_i$, proto $[\![e_1, \dots, e_{k+1}]\!] \subseteq [\![v_1, \dots, v_{k+1}]\!]$. Na druhou stranu, v_i pro $i \in \{1, \dots, k+1\}$ je lineární kombinace vektorů $e_1, \dots, e_i$, proto $[\![v_1, \dots, v_{k+1}]\!] \subseteq [\![e_1, \dots, e_{k+1}]\!]$.

Takže pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ $(e_1, \dots, e_k)$ je ortogonální báze prostoru U_k a $U_n = V$.

Nakonec, pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ položme

$$\overline{e_i} = \frac{e_i}{\|e_i\|}$$

a dostaneme ortonormální bázi $(\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n})$ prostoru V. □

V předchozím důkazu je možné vždy po získání e_k tento vektor normovat a dostat tak ortonormální bázi prostoru U_k. V takovém případě se zjednoduší výpočet ortogonální projekce do podprostoru U_k a tedy i výpočet vektoru e_{k+1}.