7. přednáška, 8. 4. 2024

Důsledek. *Buď $g\colon U \to U$ nilpotentní transformace. Pak existuje báze prostoru U taková, že*

(1) transformace g má blokově diagonální matici, která je přímým součtem Jordanových bloků $J_s(0)$;

(2) transformace $f = g + \xi\,\mathrm{id}$ má blokově diagonální matici, která je přímým součtem Jordanových bloků $J_s(\xi)$.

Důkaz. Báze sestavená z cyklických bází cyklických podprostorů v důkazu předchozího tvrzení má požadované vlastnosti. □

Příklad. Uvažujme lineární transformaci $\mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$, $v \mapsto Av$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -4 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Anulující polynom nejmenšího stupně je $x^3+6x^2+12x+8 = (x+2)^3$, s jediným kořenem -2, což je současně jediná vlastní hodnota matice A. První rozklad má proto jediného sčítance $U = \mathbb{C}^5$ a

$$B = A + 2E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

je nilpotentní matice, $B^3 = 0$. Spočítáme

$$B^2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

načež $\operatorname{Ker} B^2 = [\![(5,0,0,0,-4),(0,5,0,0,-1),(0,0,5,0,-2),(0,0,0,5,4)]\!]$. Tento čtyřrozměrný podprostor můžeme doplnit do báze v $\mathbb{C}^5$ libovolným vektorem, který v něm neleží, zvolme například

$$e_1 = (0,0,0,0,1).$$

Tím je ukončen první krok. Ve druhém kroku spočítáme

$$\operatorname{Ker} B = [\![(1,0,0,1,0),(0,-5,1,-2,-1)]\!],$$

a přidáme vektor

$$Be_1 = (0,0,3,4,2).$$

Získanou sestavu tří lineárně nezávislých vektorů je třeba doplnit do báze ve čtyřrozměrném $\operatorname{Ker} B^2$ jedním vektorem; zvolme například

$$e_2 = (0,0,0,5,4)$$

(mohli jsme zvolit kterýkoliv ze shora uvedených generátorů podprostoru $\operatorname{Ker} B^2$). Tím je ukončen druhý krok. Ve třetím kroku je $\operatorname{Ker} B^0 = \operatorname{Ker} E = 0$ a doplňujeme tedy dva vektory

$$B^2e_1 = (-5,0,0-5,0) \quad \text{a} \quad Be_2 = (-10,15,-3,-4,3)$$

do báze v dvojrozměrném $\operatorname{Ker} B$, což ovšem nevyžaduje žádný doplňující vektor a jsme hotovi.

Hledaná báze prostoru $\mathbb{C}^5$ je proto $(e_1, Be_1, B^2e_1, e_2, Be_2)$. Příslušný diagram je

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=tiny]
\bullet \arrow[d] & \\
\bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet & \bullet
\end{tikzcd}$$

a jeho dva sloupky odpovídají dvěma Jordanovým blokům rozměrů 3 a 2. Dostáváme blokově diagonální matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(při obráceném pořadí vektorů v cyklických bázích by jedničky stály nad diagonálou; odlišné může být i pořadí Jordanových bloků). □

13.2.2. Druhý rozklad a Jordanův tvar matice

Vraťme se nyní k obecné transformaci $f\colon V \to V$ a prvnímu rozhladu $V = U_1 \dotplus \cdots \dotplus U_s$ podle některého anulujícího polynomu. Pro každý z prostorů U_l, $l = 1, \ldots, s$ dostáváme rozklad na cyklické podprostory $T_{l,i}$, kde $i = 1, \ldots, k_l$, celkem tedy

$$V = T_{1,1} \dotplus \cdots \dotplus T_{1,k_1} \dotplus \cdots \dotplus T_{s,1} \dotplus \cdots \dotplus T_{s,k_s}.$$

Definice 13.2.4. Tento rozklad je *druhý rozklad* prostoru lineární transformace.

Připomeňme, že cyklické podprostory $T_{i,j}$ jsou invariantní a zobrazení $f|_{T_{i,j}}$ mají v cyklické bázi matici tvaru $J_r(\xi)$, $r = \dim T_{i,j}$.

Definice 13.2.5. Matice, která je přímým součtem Jordanových bloků, je *matice v Jordanově tvaru.*

Příklad. Matice

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|cc||cc|cc|c|c}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3
\end{array}\right)$$

je v Jordanově tvaru. Bloky prvního rozkladu jsou vyznačeny dvojitou čarou. Blokům druhého rozkladu odpovídají diagramy

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
\bullet \arrow[d] & & & & & & & \\
\bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[d] & \text{resp.} & \bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[d] & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{tikzcd}$$

Šipky zde znamenají zobrazení $f - 2\,\mathrm{id}$ resp. $f - 3\,\mathrm{id}$. Délky spodních řádků jsou dimenze prostorů vlastních vektorů s vlastními hodnotami 2 resp. 3. □

Důsledek. *Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace. Pak existuje báze prostoru V, vzhledem k níž f má matici v Jordanově tvaru.*

Definice 13.2.6. Báze z předchozího důsledku je *Jordanova báze* a získáme ji sjednocením cyklických bází v jednotlivých cyklických podprostorech $T_{i,j}$.

Při praktickém převodu na Jordanův tvar nejdříve nalezneme invariantní podprostory $U = \operatorname{Ker} g^k = \operatorname{Ker}(f - \xi\,\mathrm{id})^k$ prvního rozkladu, pro každou vlastní hodnotu ξ zvlášť. V každém z nich pak hledáme cyklické podprostory a cyklické báze postupem uvedeným v důkazu Tvrzení 13.2.3.

Zbývá rozhodnout, nakolik je Jordanův tvar matice lineární transformace určen jednoznačně. Postup k nalezení Jordanovy báze, který jsme popsali, udává jednoznačně všechny Jordanovy buňky $J_r(\xi)$. Čísla ξ probíhají všechny vlastní hodnoty, rozměr r je určen prostřednictvím diagramů (13) a počet buněk s daným rozměrem je určen prostřednictvím čísel $n_1 \ge n_2 \ge \cdots \ge n_k$, která jsou zase jednoznačně určena formulemi (14), kde $g = f - \xi\,\mathrm{id}$. Neurčeno pak zůstává pouze pořadí Jordanových buněk.

Cvičení. Spočtěte Jordanův tvar transponované matice A^{T}. (Výsledek: je týž.) □

13.2.3. Minimální polynom

Minimální polynom můžeme jednoduše stanovit z Jordanova tvaru jako polynom

$$(x - \xi_1)^{\mu_1} \cdots (x - \xi_s)^{\mu_s},$$

kde $\xi_1, \ldots, \xi_s$ jsou vlastní hodnoty lineární transformace, resp. matice a $\mu_1, \ldots, \mu_s$ jsou výšky (maximální délky sloupků) diagramů (13) pro jednotlivé vlastní hodnoty $\xi_1, \ldots, \xi_s$. (Dokažte jako cvičení.)

Příklad. Matice z posledního příkladu má minimální polynom $(x - 2)^3(x - 3)^2$. □

13.3. Jordanův tvar matice a kritérium podobnosti matic

Připomeňme, že dvě čtvercové matice A, B jsou podobné, jestliže existuje invertibilní matice Q taková, že $B = QAQ^{-1}$. Zapisujeme $A \approx B$. Dále připomeňme, že matice jedné a téže lineární transformace v různých bázích jsou si podobné (maticí Q je v tomto případě matice přechodu mezi bázemi).

Tvrzení 13.3.1. *Každá čtvercová komplexní matice je podobná matici v Jordanově tvaru.*

Důkaz. Buď A čtvercová komplexní matice typu $n \times n$. Potom A je maticí lineární transformace $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $u \mapsto Au$. V Jordanově bázi má transformace f matici B v Jordanově tvaru. Pak $B \approx A$. □

Definice 13.3.1. Matice B z předchozího důkazu je *Jordanův tvar matice* A.

Jordanův tvar je určen jednoznačně až na pořadí bloků a rozhoduje o podobnosti matic:

Tvrzení 13.3.2. *Matice jsou si podobné právě tehdy, když mají stejný Jordanův tvar až na pořadí Jordanových bloků.*

Důkaz. Jsou-li si matice A', A'' podobné, pak zobrazení $u \mapsto A'u$, $u \mapsto A''u$ mají stejné charakteristické polynomy, stejné vlastní hodnoty a stejné jsou i dimenze a počty invariantních podprostrorů určené diagramy (13) a formulemi (14) (cvičení). Proto jsou stejné i Jordanovy tvary.

Naopak, buďte $B' \approx A'$ a $B'' \approx A''$ Jordanovy tvary matic A' a A''. Jestliže se B' a B'' liší jen pořadím Jordanových bloků, pak jsou si podobné (cvičení), načež $A' \approx B' \approx B'' \approx A''$. $\square$

Cvičení. Dokažte, že pro libovolnou čtvercovou matici platí $A \approx A^{\mathsf{T}}$.
Návod: Dokažte postupně

(i) $J \approx J^{\mathsf{T}}$ pro libovolnou Jordanovu matici J (stačí zpřeházet vektory v Jordanově bázi);
(ii) je-li $A \approx J$, pak $A^{\mathsf{T}} \approx J^{\mathsf{T}}$. $\square$

14. Skalární součin

Označení. Číslo komplexně sdružené k číslu z označujeme $\overline{z}$. Je-li $A = (A^i_j)$ matice, označujeme $\overline{A} = \left(\overline{A^i_j}\right)$.

Definice 14.0.1. Buď V vektorový prostor nad P, kde $P = \mathbb{R}$ nebo $P = \mathbb{C}$. Zobrazení $g\colon V \times V \to P$ je *skalární součin* na V, jestliže pro libovolné $u, v, w \in V$ a $p \in P$ platí

(1) $g(u + v, w) = g(u, w) + g(v, w)$;
(2) $g(pu, v) = pg(u, v)$;
(3) $g(u, v) = \overline{g(v, u)}$;
(4) $g(v, v) > 0$ pro $v \neq 0$.

Číslo $g(v, v)$ je reálné pro každý vektor v, i v případě, že $P = \mathbb{C}$ (cvičení). Díky tomu lze ve čtvrté vlastnosti porovnávat $g(v, v)$ s 0.

První dvě vlastnosti znamenají, že skalární součin je *lineární v prvním argumentu*, třetí vlastnost je v reálném případě *symetrie*, v komplexním případě *kosá symetrie*, čtvrtá vlastnost je *pozitivní definitnost*.

Definice 14.0.2. Vektorový prostor nad P se skalárním součinem je *prostor se skalárním součinem*. Pokud $P = \mathbb{R}$, skalární součin je *eukleidovský* a prostor je *eukleidovský*. Pokud $P = \mathbb{C}$, skalární součin je *hermiteovský* a prostor je *hermiteovský* nebo *unitární*.

Označení. Nemůže-li dojít k nedorozumění, místo $g(u, v)$ píšeme jen (u, v).

Tvrzení 14.0.1. *Buď V prostor se skalárním součinem nad P. Pro libovolné $u, v, w \in V$ a $p \in P$ platí*

(1) $(u, v + w) = (u, v) + (u, w)$;
(2) $(u, pv) = \overline{p}(u, v)$;
(3) $(0, v) = (v, 0) = 0$;
(4) $(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Důkaz. (1)

$$(u, v + w) = \overline{(v + w, u)} = \overline{(v, u) + (w, u)} = \overline{(v, u)} + \overline{(w, u)} = (u, v) + (u, w).$$

(2)

$$(u, pv) = \overline{(pv, u)} = \overline{p(v, u)} = \overline{p}\,\overline{(v, u)} = \overline{p}(u, v).$$

(3)

$$(0, v) = (0 \cdot v, v) = 0 \cdot (v, v) = 0 \quad \text{a} \quad (v, 0) = \overline{(0, v)} = 0.$$

(4) Důsledek podmínky (4) v definici skalárního součinu a předchozího bodu (3). □

Podle (1) a (2) v předchozím tvrzení Eukleidovský skalární součin je lineární i v druhém argumentu.

Příklad. (1) Standardní skalární součin na $\mathbb{R}^n$. Pro $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$,

$$(x, y) = x^1 y^1 + \cdots + x^n y^n.$$

(2) Standardní skalární součin na $\mathbb{C}^n$. Pro $x, y \in \mathbb{C}^n$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$,

$$(x, y) = x^1 \overline{y^1} + \cdots + x^n \overline{y^n}.$$

(3) Buďte $a_1, \dots, a_n$ kladná reálná čísla. Zobrazení $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, které vektorům $x = (x^1, \dots, x^n), y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$ přiřadí číslo

$$(x, y) = a_1 x^1 y^1 + \dots + a_n x^n y^n,$$

je skalární součin na $\mathbb{R}^n$.

(4) Buďte $a_1, \dots, a_n$ kladná reálná čísla. Zobrazení $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, které vektorům $x = (x^1, \dots, x^n), y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{C}^n$ přiřadí číslo

$$(x, y) = a_1 x^1 \overline{y^1} + \dots + a_n x^n \overline{y^n},$$

je skalární součin na $\mathbb{C}^n$.

(5) Zobrazení, které maticím $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ přiřadí číslo

$$(A, B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A^i_j B^i_j,$$

je skalární součin na $\mathbb{R}^{m \times n}$.

(6) Zobrazení, které maticím $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ přiřadí číslo

$$(A, B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A^i_j \overline{B^i_j},$$

je skalární součin na $\mathbb{C}^{m \times n}$.

(7) Zobrazení, které spojitým reálným funkcím f, g na intervalu $[0, 2\pi]$ přiřadí reálné číslo

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) \mathrm{d}x,$$

je skalární součin na prostoru všech spojitých reálných funkcí na intervalu $[0, 2\pi]$. □

14.1. Délka (norma) vektoru

Připomeňme, že $(v, v) \in \mathbb{R}$ a $(v, v) \geq 0$ pro každé v.

Definice 14.1.1. Buď V prostor se skalárním součinem, $v \in V$. *Délka* nebo *norma* vektoru v je číslo

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}.$$

Definice 14.1.2. Vektor délky 1 je *jednotkový* nebo *normovaný*.

Délka vektoru tedy závisí na skalárním součinu, a tak uvedené značení lze použít jen, je-li jasné, který skalární součin je uvažován a nemůže dojít k nedorozumění.

Příklad. (1) Mějme standardní skalární součin na $\mathbb{R}^2$. Délka vektoru $(1, 2)$ je $\sqrt{5}$.

(2) Na $\mathbb{R}^2$ mějme skalární součin $((x^1, x^2), (y^1, y^2)) = x^1 y^1 + 2x^2 y^2$. Délka vektoru $(1, 2)$ je 3.

(3) Na prostoru všech spojitých reálných funkcí na intervalu $[0, 1]$ mějme skalární součin

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) \mathrm{d}x.$$

Takže délka (norma) funkce f je

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2 \mathrm{d}x}.$$

Pokud, například, $f(x) = x$, potom

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

□

Tvrzení 14.1.1. *Buď V prostor se skalárním součinem nad P. Pro libovolné $v \in V$ a $p \in P$ platí*

(1) $\|v\| \geq 0$, navíc $\|v\| = 0$ právě tehdy, když $v = 0$,
(2) $\|pv\| = |p|\|v\|$,
(3) jestliže $v \neq 0$, pak

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1.$$

Důkaz. (1) Jednoduchý důsledek definice skalárního součinu a Tvrzení 14.0.1.
(2) $\|pv\| = \sqrt{(pv, pv)} = \sqrt{p\overline{p}(v, v)} = \sqrt{|p|^2(v, v)} = |p|\sqrt{(v, v)} = |p|\|v\|$.
(3) Cvičení. □

Lemma 14.1.2. *(1)* $\mathrm{re}(u, v) = \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$
(2) $\mathrm{im}(u, v) = \frac{1}{2}(\|u + \mathrm{i}v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$

Důkaz. (1)

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v, u + v) = \\ &= (u, u) + (u, v) + (v, u) + (v, v) = \\ &= (u, u) + (u, v) + \overline{(u, v)} + (v, v) = \\ &= \|u\|^2 + 2\,\mathrm{re}(u, v) + \|v\|^2 \end{aligned}$$

Z toho dostaneme

$$\mathrm{re}(u, v) = \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$$

(2)

$$\begin{aligned} \|u + \mathrm{i}v\|^2 &= (u + \mathrm{i}v, u + \mathrm{i}v) = \\ &= (u, u) + (u, \mathrm{i}v) + (\mathrm{i}v, u) + (\mathrm{i}v, \mathrm{i}v) = \\ &= (u, u) - \mathrm{i}(u, v) + \mathrm{i}\overline{(u, v)} + (v, v) = \\ &= \|u\|^2 + 2\,\mathrm{im}(u, v) + \|v\|^2 \end{aligned}$$

Z toho dostaneme

$$\mathrm{im}(u, v) = \frac{1}{2}(\|u + \mathrm{i}v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$$

□

14.2. Nerovnosti

Tvrzení 14.2.1 (Cauchyho-Buňakovského-Schwarzova nerovnost)**.** *Nechť V je prostor se skalárním součinem a $u, v \in V$. Pak*

$$|(u, v)| \leq \|u\|\|v\|.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $\{u, v\}$ je lineárně závislá množina.

Důkaz. Je-li $u = 0$ nebo $v = 0$, (ne)rovnost platí a $\{u, v\}$ je lineárně závislá množina.

Nechť $u \neq 0$ a $v \neq 0$. Stačí dokazovat případ $\|u\| = \|v\| = 1$; obecný se na něj převede záměnou u za $u/\|u\|$ a v za $v/\|v\|$ (cvičení). V eukleidovském případě máme

$$0 \leq \frac{1}{2}\|u \pm v\|^2 = \frac{1}{2}(u \pm v, u \pm v) = \frac{1}{2}((u, u) \pm (u, v) \pm (v, u) + (v, v))$$
$$= 1 \pm (u, v).$$

Odtud $\mp(u, v) \leq 1$, a tedy $|(u, v)| \leq 1$.

Jestliže platí rovnost $|(u, v)| = 1$, pak $(u, v) = \pm 1$, načež $0 = 1 \mp (u, v) = \frac{1}{2}\|u \mp v\|^2$, a tedy $u \mp v = 0$ a $\{u, v\}$ je lineárně závislá množina. □

Důležitý důsledek Cauchyho–Buňakovského–Schwarzovy nerovnosti je následující tvrzení, které je známé jako trojúhelníková nerovnost.

Tvrzení 14.2.2 (Trojúhelníková nerovnost)**.** *Nechť V je prostor se skalárním součinem a $u, v \in V$. Pak*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $\{u, v\}$ je lineárně závislá množina.

Důkaz.

$$\|u + v\|^2 = (u + v, u + v) = (u, u) + (u, v) + \overline{(u, v)} + (v, v) =$$
$$= \|u\|^2 + 2\,\mathrm{re}(u, v) + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2|(u, v)| + \|v\|^2 \leq$$
$$\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

Zbytek důkazu je jednoduché cvičení. □