6. přednáška, 25. 3. 2024

13.1.3. První rozklad lineární transformace

Tvrzení 13.1.3. *Buď q anulující polynom lineární transformace $f\colon V \to V$ a nechť existuje rozklad $q = q_1 \cdots q_n$, kde $q_1, \dots, q_n$ jsou po dvou nesoudělné ($D(q_i, q_j) = 1$ pro $i \neq j$). Pro $i \in \{1, \dots, n\}$ označme $U_i = \operatorname{Ker} q_i(f)$. Pak platí:*

(1) každý podprostor U_i je invariantní;
(2) $V = U_1 \dot{+} \cdots \dot{+} U_n$;
(3) pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ polynom q_i je anulujícím polynomem transformace $f|_{U_i}$.

Důkaz. (1) Nechť $u \in U_i$, tj. $q_i(f)(u) = 0$. Potom

$$q_i(f)(f(u)) = (q_i(f) \circ f)(u) = (f \circ q_i(f))(u) = f(q_i(f)(u)) = f(0) = 0$$

(použili jsme to, že f a $q_i(f)$ spolu komutují podle Důsledku Tvrzení 11.5.7). Tudíž, $f(u) \in U_i$.

(2) Nejdříve případ $n = 2$. Nechť $q = q_1 q_2$ a $D(q_1, q_2) = 1$. Pak existují polynomy p_1, p_2 takové, že $1 = q_1 p_1 + q_2 p_2$. Dosazením f získáváme rovnost

$$\mathrm{id} = q_1(f) \circ p_1(f) + q_2(f) \circ p_2(f),$$

takže pro libovolný vektor $v \in V$ platí

$$v = q_1(f)(p_1(f)(v)) + q_2(f)(p_2(f)(v)). \tag{12}$$

Ukažme, že první sčítanec $q_1(f)(p_1(f)(v))$ z (12) leží v U_2. Označíme-li $w = p_1(f)(v)$, stačí ověřit, že $q_1(f)(w) \in \operatorname{Ker} q_2(f)$:

$$q_2(f)(q_1(f)(w)) = (q_2(f) \circ q_1(f))(w) = (q_2 q_1)(f)(w) = q(f)(w) = 0,$$

protože q je anulující polynom pro f. Podobně se ukáže, že druhý ze sčítanců leží v U_1. Tudíž, $v \in U_1 + U_2$. Protože v byl libovolný vektor z V, máme $V = U_1 + U_2$.

Ukažme ještě, že $U_1 \cap U_2 = 0$. Nechť tedy $v \in U_1 \cap U_2$, tj. $q_1(f)(v) = 0$ a $q_2(f)(v) = 0$. Rovnost (12) platí i po záměně $p \leftrightarrow q$ (protože $p_i(f)$ a $q_i(f)$ spolu komutují podle Důsledku Tvrzení 11.5.7), načež

$$v = p_1(f)(q_1(f)(v)) + p_2(f)(q_2(f)(v)) = p_1(f)(0) + p_2(f)(0) = 0,$$

protože $p_1(f), p_2(f)$ jsou lineární zobrazení. Dokázali jsme tedy, že $V = U_1 \dot{+} U_2$.

Obecný případ $n > 2$ se dokáže indukcí (cvičení).

(3) Polynom q_i je anulujícím polynomem transformace $f|_{U_i}$, protože $\operatorname{Ker} q_i(f) = U_i$, načež

$$\operatorname{Ker} q_i(f|_{U_i}) = \operatorname{Ker}(q_i(f)|_{U_i}) = U_i \cap \operatorname{Ker} q_i(f) = U_i, \text{ a tedy } q_i(f|_{U_i}) = 0. \qquad \square$$

Tvrzení 13.1.4. *Nechť existuje přímý rozklad $V = U_1 \dot{+} U_2$, kde U_1, U_2 jsou invariantní podprostory vzhledem k lineární transformaci f. Zvolme nějakou bázi $(e_1, \dots, e_m)$ podprostoru U_1 a nějakou bázi $(e_{m+1}, \dots, e_n)$ podprostoru U_2. Pak $(e_1, \dots, e_n)$ je báze prostoru V a transformace f v ní má matici tvaru*

$$A = \begin{pmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^m_1 & \dots & A^m_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A^{m+1}_{m+1} & \dots & A^{m+1}_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A^n_{m+1} & \dots & A^n_n \end{pmatrix}.$$

Označíme-li

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_1^1 & \dots & A_m^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^m & \dots & A_m^m \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} A_{m+1}^{m+1} & \dots & A_n^{m+1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m+1}^n & \dots & A_n^n \end{pmatrix},$$

pak A_i je matice lineární transformace $f|_{U_i}$.

Důkaz. Ověřte, že $(e_1, \dots, e_n)$ je báze prostoru V.

Prvních m sloupků matice A je tvořeno souřadnicemi vektorů $f(e_1), \dots, f(e_m)$ v bázi $(e_1, \dots, e_n)$. Vektory $f(e_1), \dots, f(e_m)$ ovšem leží v U_1 s bází $(e_1, \dots, e_m)$, takže koeficienty u vektorů $e_{m+1}, \dots, e_n$ v příslušné lineární kombinaci budou nulové.

Ověřte, že A_1 je matice lineární transformace $f|_{U_1}$ vzhledem k bázi $(e_1, \dots, e_m)$.

Zbytek analogicky. □

O shora uvedené matici A říkáme, že je v *blokově diagonálním tvaru* s bloky A_1, A_2 na diagonále. Stručně zapisujeme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Říkáme též, že A je *přímý součet submatic* A_1 a A_2.

Podobně se v případě přímého součtu $V = U_1 \dot{+} \dots \dot{+} U_n$ invariantních podprostorů $U_1, \dots, U_n$ matice zobrazení f rozpadá na přímý součet submatic $A_1, \dots, A_n$ odpovídajících lineárním zobrazením $f|_{U_1}, \dots, f|_{U_n}$:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}.$$

O matici A rovněž pravíme, že je *blokově diagonální.*

V ideálním případě lze prostor V rozložit na přímý součet jednorozměrných invariantních podprostorů, generovaných vlastními vektory, což je nám již známý případ diagonalizovatelné matice.

Příklad. Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = (x-1)(x^2 - 4x + 5)$ (ověřte). Vidíme, že polynom χ_A je součinem nesoudělných polynomů $q_1 = x - 1$ a $q_2 = x^2 - 4x + 5$.

Matice A představuje lineární zobrazení $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $u \mapsto Au$. Počítejme $U_1 = \operatorname{Ker} q_1(\alpha) = \operatorname{Ker}(\alpha - \mathrm{id})$. Jádro $\operatorname{Ker}(\alpha - \mathrm{id})$ vypočteme řešením rovnice $(\alpha - \mathrm{id})(u) = 0$, což je homogenní soustava s maticí

$$q_1(A) = A - E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a fundamentálním řešením $e_1 = (1, 1, 1)$ (ověřte). Dostáváme jednorozměrný invariantní podprostor

$$U_1 = \operatorname{Ker} q_1(\alpha) = [\![(1,1,1)]\!].$$

Podobně $U_2 = \operatorname{Ker} q_2(\alpha) = \operatorname{Ker}(\alpha^2 - 4\alpha + 5\,\mathrm{id})$. Toto jádro vypočteme řešením rovnice

$$(\alpha^2 - 4\alpha + 5\,\mathrm{id})(u) = 0,$$

což je homogenní soustava s maticí

$$q_2(A) = A^2 - 4A + 5E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a fundamentálním řešením $e_2 = (0,0,1), e_3 = (1,-1,0)$ (ověřte). Dostáváme dvojrozměrný invariantní podprostor

$$U_2 = \operatorname{Ker} q_2(\alpha) = [\![(0,0,1),(1,-1,0)]\!].$$

Získali jsme (a) přímý rozklad $\mathbb{R}^3 = U_1 \dot{+} U_2$ na invariantní podprostory U_1 a U_2; (b) „novou“ bázi (e_1, e_2, e_3). Matici přechodu od „staré“ kanonické báze k „nové“ bázi označme Q. Inverzní matice Q^{-1} je matice přechodu od „nové“ báze ke kanonické bázi. Tedy

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice zobrazení α vzhledem k „nové“ bázi je tedy blokově diagonální matice

$$QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Příklad. Nechť $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení, jehož matice vzhledem ke kanonické („staré“) bázi $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom matice A je $\chi_A = -x^2(x-2)$ a můžeme jej zapsat jako součin nesoudělných polynomů $q_1 = -x^2$ a $q_2 = x-2$. Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 2$.

Tedy

$$q_1(A) = -A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -6 & 6 & -12 \\ -4 & 4 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad q_2(A) = A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Potom $U_1 = \operatorname{Ker} q_1(A) = \operatorname{Ker}(-A^2)$ je množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí $-A^2$ a $U_2 = \operatorname{Ker} q_2(A) = \operatorname{Ker}(A-2E)$ je množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí $A - 2E$. Tedy $U_1 = [\![(-2,0,1),(1,1,0)]\!]$ a $U_2 = [\![(1,3,2)]\!]$.

Takže prostor $\mathbb{R}^3$ je přímým součtem invariantních podprostorů U_1, U_2 a vektory $(-2,0,1),(1,1,0),(1,3,2)$ tvoří „novou“ bázi prostoru $\mathbb{R}^3$. Matice přechodu od „staré“ báze k „nové“ bázi je

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3/2 & 5/2 & -3 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a matice zobrazení α vzhledem k „nové“ bázi je

$$A' = Q \cdot A \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

13.2. Druhý rozklad lineární transformace

Úmluva. Všude $P = \mathbb{C}$.

V přednášce o vlastních vektorech jsme se seznámili s diagonalizovatelnými transformacemi. V bázi složené z vlastních vektorů v_i mají diagonální matici s vlastními čísly λ_i na diagonále.

Obecná lineární transformace nemusí mít bázi složenou z vlastních vektorů. Nicméně, jak ukážeme, lze zkonstruovat jinou významnou bázi — Jordanovu. Matice lineární transformace v Jordanově bázi je tzv. Jordanova matice. Opět má na diagonále vlastní čísla, ale může obsahovat i nenulové prvky v řadě sousedící s diagonálou (všechny ovšem rovny 1).

Východiskem pro nalezení Jordanovy báze bude první rozklad, příslušný rozkladu charakteristického polynomu (nebo libovolného jiného anulujícího polynomu) χ_f na nesoudělné součinitele. Při $P = \mathbb{C}$ ovšem existuje rozklad na kořenové činitele

$$\chi_f = (x - \xi_1)^{k_1} \cdots (x - \xi_s)^{k_s}, \quad \xi_i \neq \xi_j \text{ pro } i \neq j,$$

a pro $i \neq j$ jsou polynomy $(x - \xi_i)^{k_i}$ a $(x - \xi_j)^{k_j}$ nesoudělné. Invariantní podprostory prvního rozkladu pak jsou

$$U_i = \operatorname{Ker}(f - \xi_i \operatorname{id})^{k_i}.$$

Na jednotlivých invariantních podprostorech vznikají restrikce $f|_{U_i} \colon U_i \to U_i$. Označíme-li $g_i = f - \xi_i \operatorname{id}$, pak $\operatorname{Ker} g_i^{k_i} = U_i$, a tedy $(g|_{U_i})^{k_i} = 0$.

Má tedy smysl studovat transformace $f \colon U \to U$ takové, že pro některé číslo ξ transformace $g = f - \xi \operatorname{id}$ splňuje $g^k = 0$. Výsledky použijeme pro $U = U_i$ a $g = f|_{U_i} - \xi_i \operatorname{id}_{U_i}$, $i = 1, \ldots, s$.

13.2.1. Rozklad na součet cyklických podprostorů

Definice 13.2.1. Transformace $g \colon U \to U$ (resp. čtvercová matice B) se nazývá *nilpotentní*, jestliže existuje celé číslo $k \geq 1$ takové, že $g^k = 0$ (resp. $B^k = 0$).

Cvičení. Transformace g je nilpotentní právě tehdy, když je její matice B (v libovolné bázi) nilpotentní. □

Definice 13.2.2. Podprostor $T \subseteq U$ se nazývá *cyklický* vzhledem k transformaci $g \colon U \to U$, jestliže má bázi $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ takovou, že

$$g(e_1) = e_2, \quad g(e_2) = e_3, \quad \ldots, \quad g(e_{n-1}) = e_n, \quad g(e_n) = 0.$$

Bázi $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ nazýváme *cyklická báze.*

Schematicky,

$$e_1 \xrightarrow[g]{} e_2 \xrightarrow[g]{} \cdots e_{n-1} \xrightarrow[g]{} e_n \xrightarrow[g]{} 0.$$

Definice 13.2.3. Matice

$$J_1(\xi) = (\xi), \quad J_2(\xi) = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 1 & \xi \end{pmatrix}, \quad J_3(\xi) = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 1 & \xi & 0 \\ 0 & 1 & \xi \end{pmatrix},$$

$$J_4(\xi) = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi \end{pmatrix}, \quad \text{atd.}$$

se nazývají *Jordanovy bloky* (též *Jordanovy buňky*).

Tvrzení 13.2.1. *Buď T cyklický podprostor nilpotentní transformace g, buď $f = g + \xi\,\mathrm{id}$. Pak*

(1) T je invariantní vzhledem k lineárním transformacím g i f;
(2) $g|_T$ má v cyklické bázi matici $J_n(0)$;
(3) $f|_T$ má v cyklické bázi matici $J_n(\xi)$.

Důkaz. Cvičení. □

Často se setkáváme s jinou definicí Jordanových buněk — jedničky stojí v řadě těsně *nad* diagonálou. To odpovídá opačnému pořadí vektorů cyklické báze, tj. $(e_n, \dots, e_2, e_1)$.

Lemma 13.2.2. *Buď $h\colon U \to V$ lineární zobrazení mezi konečněrozměrnými vektorovými prostory. Zvolme libovolně bázi v $\operatorname{Ker} h$ a doplňme ji do báze v U nějakými vektory $e_1, \dots, e_m$. Pak vektory $h(e_1), \dots, h(e_m)$ tvoří bázi v $\operatorname{Im} h$.*

Důkaz. Cvičení (viz důkaz formule $\dim U = \dim \operatorname{Ker} h + \dim \operatorname{Im} h$ v Tvrzení 11.2.3). □

Tvrzení 13.2.3. *Buď $g\colon U \to U$ nilpotentní transformace. Pak existují cyklické podprostory $T_1, \dots, T_r \subseteq U$ takové, že $U = T_1 \dot{+} \cdots \dot{+} T_r$.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme uvedením praktického algoritmu pro nalezení cyklických podprostorů a jejich cyklických bází. Popis algoritmu tvoří věty psané kurzívou.

Máme $U = \operatorname{Ker} g^k$ pro jisté k (protože g je nilpotentní). Bez újmy na obecnosti je číslo k minimální, to jest, $g^{k-1} \neq 0$, a tudíž $\operatorname{Ker} g^{k-1} \neq U$.

1. *Zvolíme libovolně bázi v $\operatorname{Ker} g^{k-1}$ a doplníme ji do báze v $U = \operatorname{Ker} g^k$ nějakými vektory $e_1, \dots, e_{m_1}$.*

   Podle lemmatu vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1})$ tvoří bázi v $\operatorname{Im} g^{k-1}$ a jsou tedy lineárně nezávislé. Navíc, jelikož $g^k = 0$, máme $g(e_1), \dots, g(e_{m_1}) \in \operatorname{Ker} g^{k-1}$.

2. *Zvolíme libovolně bázi v $\operatorname{Ker} g^{k-2}$ a přidáme k ní vektory $g(e_1), \dots, g(e_{m_1}) \in \operatorname{Ker} g^{k-1}$.*

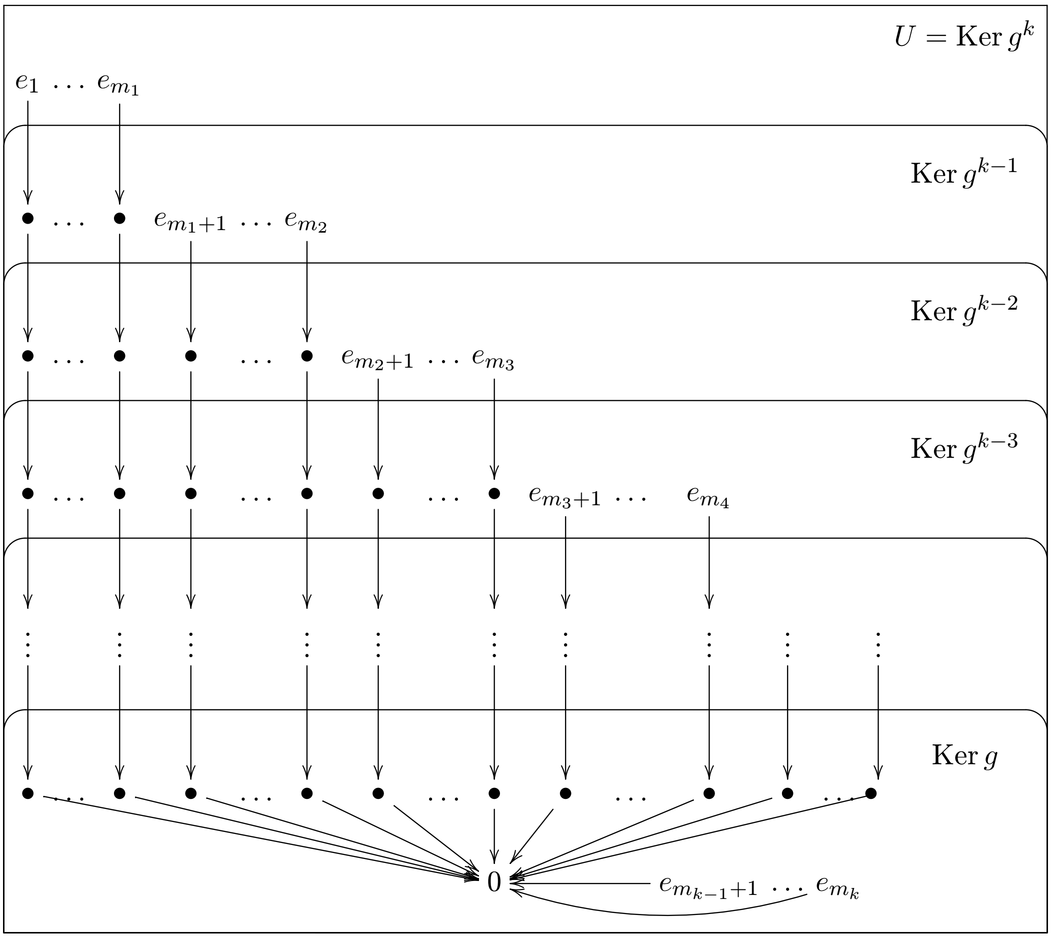
   Tato sestava je lineárně nezávislá. Skutečně, vezměme si lineární kombinaci všech vektorů z této sestavy, která je rovna nulovému vektoru. Máme tedy skaláry $c_1, \dots, c_{m_1}$, takové, že $c_1 g(e_1) + \cdots + c_{m_1} g(e_{m_1}) \in \operatorname{Ker} g^{k-2}$. Pak ovšem $0 = g^{k-2}(c_1 g(e_1) + \cdots + c_{m_1} g(e_{m_1})) = c_1 g^{k-1}(e_1) + \cdots + c_{m_1} g^{k-1}(e_{m_1})$, a tedy $c_1 = \cdots = c_{m_1} = 0$, protože vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1})$ jsou lineárně nezávislé (viz výše). A potom také ostatní koeficienty v uvažované lineární kombinaci jsou nulové, protože příslušné vektory tvoří bázi.

   Sestavu doplníme do báze v $\operatorname{Ker} g^{k-1}$ nějakými vektory $e_{m_1+1}, \dots, e_{m_2}$.

   Tím se vlastně báze v $\operatorname{Ker} g^{k-2}$ doplní do báze v $\operatorname{Ker} g^{k-1}$ vektory $g(e_1), \dots, g(e_{m_1}), e_{m_1+1}, \dots, e_{m_2}$. Z lemmatu potom vyplývá, že vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1}), g^{k-2}(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2})$ tvoří bázi v $\operatorname{Im}(g^{k-2}|_{\operatorname{Ker} g^{k-1}})$ a jsou tedy lineárně nezávislé.

3. *Zvolíme libovolně bázi v $\operatorname{Ker} g^{k-3}$ a připojíme k ní vektory $g^2(e_1), \dots, g^2(e_{m_1})$, $g(e_{m_1+1})$, $\dots, g(e_{m_2}) \in \operatorname{Ker} g^{k-2}$.*

Tato sestava je lineárně nezávislá. Skutečně, vezměme si lineární kombinaci všech vektorů z této sestavy, která je rovna nulovému vektoru. Máme tedy skaláry $c_1, \dots, c_{m_1}, c_{m_1+1}, \dots, c_{m_2}$, takové, že $c_1 g^2(e_1) + \cdots + c_{m_1} g^2(e_{m_1}) + c_{m_1+1} g(e_{m_1+1}) + \cdots + c_{m_2} g(e_{m_2}) \in \operatorname{Ker} g^{k-3}$. Pak ovšem $0 = g^{k-3}(c_1 g^2(e_1) + \cdots + c_{m_1} g^2(e_{m_1}) + c_{m_1+1} g(e_{m_1+1}) + \cdots + c_{m_2} g(e_{m_2})) = c_1 g^{k-1}(e_1) + \cdots + c_{m_1} g^{k-1}(e_{m_1}) + c_{m_1+1} g^{k-2}(e_{m_1+1}) + \cdots + c_{m_2} g^{k-2}(e_{m_2})$, a tedy $c_1 = \cdots = c_{m_1} = c_{m_1+1} = \cdots = c_{m_2} = 0$, protože vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1}), g^{k-2}(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2})$ jsou lineárně nezávislé (viz výše). A potom také ostatní koeficienty v uvažované lineární kombinaci jsou nulové, protože příslušné vektory tvoří bázi.



Sestavu doplníme do báze v $\operatorname{Ker} g^{k-2}$ *nějakými vektory* $e_{m_2+1}, \dots, e_{m_3}$.

Tím jsme tedy bázi v $\operatorname{Ker} g^{k-3}$ doplnili do báze v $\operatorname{Ker} g^{k-2}$ vektory $g^2(e_1), \dots, g^2(e_{m_1}), g(e_{m_1+1}), \dots, g(e_{m_2}), e_{m_2+1}, \dots, e_{m_3}$. A potom vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1}), g^{k-2}(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2}), g^{k-3}(e_{m_2+1}), \dots, g^{k-3}(e_{m_3})$ tvoří podle lemmatu bázi v $\operatorname{Im}(g^{k-3}|_{\operatorname{Ker} g^{k-2}})$ a jsou tedy lineárně nezávislé.

Podobných kroků provedeme k (v posledním kroku doplňujeme bázi podprostoru $\operatorname{Ker} g^0 = \operatorname{Ker} \mathrm{id} = \{0\}$ do báze v podprostoru $\operatorname{Ker} g$).

Z uvedeného postupu vyplývá, že celkově získáme bázi

$$
\begin{aligned}
&e_1, \dots, e_{m_1},\\
&g(e_1), \dots, g(e_{m_1}), e_{m_1+1}, \dots, e_{m_2},\\
&g^2(e_1), \dots, g^2(e_{m_1}), g(e_{m_1+1}), \dots, g(e_{m_2}), e_{m_2+1}, \dots, e_{m_3},\\
&\dots\\
&g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1}), g^{k-2}(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2}),\\
&\qquad g^{k-3}(e_{m_2+1}), \dots, g^{k-3}(e_{m_3}), \dots, e_{m_{k-1}+1}, \dots, e_{m_k}
\end{aligned}
$$

v prostoru U. Podprostory

$$
\begin{aligned}
&[\![e_1, g(e_1), \dots, g^{k-1}(e_1)]\!], \dots, [\![e_{m_1}, g(e_{m_1}), \dots, g^{k-1}(e_{m_1})]\!],\\
&[\![e_{m_1+1}, g(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_1+1})]\!], \dots, [\![e_{m_2}, g(e_{m_2}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2})]\!],\\
&\dots\\
&[\![e_{m_{k-1}+1}]\!], \dots, [\![e_{m_k}]\!]
\end{aligned}
$$

jsou pak cyklické podprostory s příslušnými cyklickými bázemi.

Označíme-li počet těchto cyklických podprostorů $r := \sum_{j=1}^{k} m_j$ a jednotlivé podprostory T_i pro $i = 1, \dots, r$, dostáváme $U = T_1 + \cdots + T_r$. Jelikož $\dim T_1 + \cdots + \dim T_r = \dim(T_1 + \cdots + T_r)$, podle Tvrzení 10.3.3 se jedná o přímý součet podprostorů. □

Nalezli jsme cyklické podprostory a v každém z nich cyklickou bázi. Situaci můžeme znázornit diagramem, jehož vrcholy jsou vektory cyklických bází a šipky znamenají zobrazení g:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & & & & & & & & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & & & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}
\tag{13}
$$

Sloupky znamenají jednotlivé cyklické podprostory. Vektory spodní řady se zobrazují na nulový vektor. Tvoří vlastně bázi v $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker}(f - \xi\,\mathrm{id}) = V_\xi$, což je prostor vlastních vektorů s vlastním číslem ξ. Tudíž, počet sloupků = počet cyklických podprostorů = $\dim V_\xi$.

Vektory dolních j řádků tvoří bázi v $\operatorname{Ker} g^j$. V j-tém řádku zdola je proto právě

$$
n_j = \dim \operatorname{Ker} g^j - \dim \operatorname{Ker} g^{j-1} = \sum_{i=1}^{k+1-j} m_i \tag{14}
$$

bodů, kde m_i jsou koeficienty z důkazu předchozího tvrzení. Čísla $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k$ jednoznačně určují délky řádků diagramu, a tím i počty cyklických podprostorů příslušných dimenzí.

Formule (14) ukazuje, že čísla $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k$ závisí jen a jen na nilpotentní transformaci g a nikoliv na konkrétním postupu, kterým byly získány jednotlivé cyklické báze. Jsou to *invarianty lineární transformace g*.