5. přednáška, 18. 3. 2024

Vlastní hodnoty lineární transformace můžeme hledat jako vlastní hodnoty matice transformace.

Tvrzení 12.2.5. *Buďte V konečněrozměrný vektorový prostor nad polem P, $f\colon V \to V$ lineární transformace a A matice transformace f vzhledem k nějaké bázi prostoru V. Potom $\lambda \in P$ je vlastní hodnota transformace f právě tehdy, když λ je vlastní hodnota matice A.*

Důkaz. Tvrzení vyplývá z toho, že vektorům z V jsou jednoznačně přiřazeny jejich souřadnice (zobrazení přiřazující vektorům jejich souřadnice je izomorfismus), transformace f je určena svou maticí A a souřadnice obrazu $f(v)$ vektoru v o souřadnicích x jsou rovny součinu matic Ax, vše vzhledem k jedné bázi. □

Vlastní hodnoty lineární transformace f tedy získáváme jako vlastní hodnoty matice A transformace f vzhledem k nějaké bázi, tedy jako kořeny charakteristického polynomu matice A. Při volbě jiné báze dostaneme jinou matici A' transformace f, jejíž vztah k A je $A' = QAQ^{-1}$, kde Q je matice přechodu mezi bázemi. Je otázkou, zda matice A a A' mají stejné charakteristické polynomy a tedy stejné vlastní hodnoty.

Definice 12.2.2. Buďte A, B čtvercové matice. Matice B je *podobná* matici A, jestliže existuje invertibilní matice Q taková, že $B = QAQ^{-1}$. Zapisujeme $B \approx A$.
Zobrazení $A \mapsto QAQ^{-1}$ je *podobnostní transformace.*

Cvičení. Dokažte, že relace $\approx$ je relace ekvivalence. □

Tvrzení 12.2.6. *Podobné matice mají stejné charakteristické polynomy.*

Důkaz. Nechť $B = QAQ^{-1}$. Potom

$$\begin{aligned}\chi_B &= \det(B - \lambda E) = \det(QAQ^{-1} - \lambda E) = \det(QAQ^{-1} - Q\lambda E Q^{-1}) = \\ &= \det(Q(A - \lambda E)Q^{-1}) = \det Q \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det Q^{-1} = \\ &= \det Q \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \frac{1}{\det Q} = \det(A - \lambda E) = \chi_A.\end{aligned}$$ □

Díky předchozímu tvrzení můžeme pomocí charakteristického polynomu matice definovat charakteristický polynom lineární transformace konečněrozměrného prostoru.

Definice 12.2.3. Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace konečněrozměrného vektorového prostoru V. *Charakteristický polynom* χ_f transformace f je roven charakteristickému polynomu χ_A matice A transformace f vzhledem k libovolné bázi.

Díky Tvrzení 12.2.6 je předchozí definice korektní a kořeny charakteristického polynomu transformace f jsou všechny vlastní hodnoty transformace f.

Tvrzení 12.2.7. *Lineární transformace n-rozměrného vektorového prostoru má nejvýše n vlastních hodnot.*

Důkaz. Charakteristický polynom je stupně n a má tedy nejvýše n kořenů. □

Definice 12.2.4. Nechť f (resp. A) je lineární transformace konečněrozměrného vektorového prostoru (resp. čtvercová matice) a λ je její vlastní hodnota.
Algebraická násobnost vlastní hodnoty λ je její násobnost jako kořene charakteristického polynomu transformace f (resp. matice A).
Geometrická násobnost vlastní hodnoty λ je dimenze podprostoru vlastních vektorů transformace f (resp. matice A) příslušných vlastní hodnotě λ.

12.3. Diagonalizovatelné transformace

Definice 12.3.1. Lineární transformace konečněrozměrného prostoru je *diagonalizovatelná*, jestliže má vzhledem k nějaké bázi diagonální matici.

Tvrzení 12.3.1. *Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace konečněrozměrného vektorového prostoru V, $(v_1, \dots, v_n)$ báze prostoru V a A matice transformace f vzhledem k uvedené bázi. Potom*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

právě tehdy, když $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní hodnoty transformace f a pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ vektor v_i je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_i.

Důkaz. Cvičení. □

Důsledek. *Lineární transformace konečněrozměrného prostoru je diagonalizovatelná právě tehdy, když existuje báze prostoru tvořená vlastními vektory transformace.*

Definice 12.3.2. Matice je *diagonalizovatelná*, jestliže je podobná diagonální matici.

Tvrzení 12.3.2. *Matice A typu $n \times n$ nad polem P je diagonalizovatelná právě tehdy, když existuje báze prostoru P^n tvořená vlastními vektory matice A.*

Důkaz. Cvičení. □

Tvrzení 12.3.3. *Lineární transformace konečněrozměrného vektorového prostoru je diagonalizovatelná právě tehdy, když její matice vzhledem k libovolné bázi je diagonalizovatelná.*

Důkaz. Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace konečněrozměrného vektorového prostoru V, $(v_1, \dots, v_n)$ báze prostoru V a A matice transformace f vzhledem k uvedené bázi.

Předpokládejme, že transformace f je diagonalizovatelná, tedy že vzhledem k nějaké bázi má diagonální matici B. Potom B je podobná A, tedy A je diagonalizovatelná.

Předpokládejme, že A je diagonalizovatelná, čili je podobná diagonální matici B a existuje tedy regulární matice Q taková, že $B = QAQ^{-1}$. Potom vektory z V, jejichž souřadnice vzhledem k bázi $(v_1, \dots, v_n)$ jsou právě sloupky matice Q, tvoří bázi prostoru V, vzhledem k níž je matice transformace f právě diagonální matice B. Tedy, f je diagonalizovatelná transformace. □

Tvrzení 12.3.4. *Buďte $v_1, \dots, v_n$ nenulové vlastní vektory příslušné po řadě různým vlastním hodnotám $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ lineární transformace $f\colon V \to V$. Potom $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá množina.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme matematickou indukcí podle n. Pro $n = 1$ tvrzení platí, protože $v_1 \neq 0$. Buď $n > 1$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro $n - 1$, tedy že množina $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ je lineárně nezávislá. Buďte $a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ skaláry takové, že

$$a_1 v_1 + \dots + a_{n-1} v_{n-1} + a_n v_n = 0. \tag{10}$$

Potom

$$\begin{aligned}
&(f - \lambda_n \operatorname{id}_V)(a_1 v_1 + \dots + a_{n-1} v_{n-1} + a_n v_n) = \\
&\quad = a_1 (f - \lambda_n \operatorname{id}_V)(v_1) + \dots + a_{n-1}(f - \lambda_n \operatorname{id}_V)(v_{n-1}) + a_n (f - \lambda_n \operatorname{id}_V)(v_n) = \\
&\quad = a_1(\lambda_1 - \lambda_n) v_1 + \dots + a_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n) v_{n-1} + a_n(\lambda_n - \lambda_n) v_n = \\
&\quad = a_1(\lambda_1 - \lambda_n) v_1 + \dots + a_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n) v_{n-1} = \\
&\quad = (f - \lambda_n \operatorname{id}_V)(0) = 0.
\end{aligned}$$

Podle indukčního předpokladu množina $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ je lineárně nezávislá, takže

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_n) = \dots = a_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n) = 0.$$

Jelikož vlastní hodnoty $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou navzájem různé, tedy $\lambda_i - \lambda_n \neq 0$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n-1\}$, dostáváme

$$a_1 = \dots = a_{n-1} = 0.$$

Po dosazení do (10) dostaneme $a_n v_n = 0$ a tedy také $a_n = 0$, protože v_n je nenulový vektor. Takže množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá. □

Důsledek. *Má-li lineární transformace n-rozměrného prostoru n vlastních hodnot, je diagonalizovatelná.*

Důkaz. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ navzájem různé vlastní hodnoty transformace $f\colon V \to V$, potom pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ existuje nenulový vlastní vektor v_i příslušný λ_i. Množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá a tvoří tedy bázi prostoru V. Matice transformace f vzhledem k bázi tvořené vlastními vektory je diagonální, takže f je diagonalizovatelná transformace. □

Důsledek. *Má-li matice typu $n \times n$ n vlastních hodnot, je diagonalizovatelná.*

Příklad. Mějme $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x^1, x^2) = (2x^1 + x^2, 3x^1 + 4x^2)$ (ověřte, že f je lineární) a na $\mathbb{R}^2$ uvažujme kanonickou bázi.

Matici zobrazení získáme tak, že do sloupků budeme psát souřadnice obrazů vektorů báze (v tomto případě souřadnice jsou stejné jako vektory).

Obrazy bázových vektorů jsou $f(1,0) = (2,3)$, $f(0,1) = (1,4)$, takže matice zobrazení f je

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$$

a jeho kořeny, tedy vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$.

Podle předchozích tvrzení je matice A podobná matici

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektory získáme jako řešení soustavy lineárních rovnic $(A - \lambda E)x = 0$ pro jednotlivé vlastní hodnoty.

Pro $\lambda_1 = 1$ řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{tedy} \qquad \begin{array}{r} 1x^1 + 1x^2 = 0 \\ 3x^1 + 3x^2 = 0 \end{array}.$$

Množina všech řešení této soustavy je $[\![(1,-1)]\!]$ a příslušné vlastní vektory jsou tedy všechny skalární násobky vektoru $v_1 = (1,-1)$. Vektor v_1 se skutečně zobrazí na svůj 1-násobek, $f(1,-1) = (1,-1)$.

Pro $\lambda_2 = 5$ řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{tedy} \qquad \begin{array}{r} -3x^1 + 1x^2 = 0 \\ 3x^1 - 1x^2 = 0 \end{array}.$$

Množina všech řešení této soustavy je $[\![(1,3)]\!]$ a příslušné vlastní vektory jsou tedy všechny skalární násobky vektoru $v_2 = (1,3)$. Vektor v_2 se skutečně zobrazí na svůj 5-násobek, $f(1,3) = (5,15)$.

Podle Tvrzení 12.3.4 vektory v_1, v_2 tvoří „novou“ bázi prostoru $\mathbb{R}^2$.

Matice přechodu Q od kanonické báze k nové bázi (ve sloupcích jsou nové souřadnice vektorů kanonické báze) a matice k ní inverzní Q^{-1}, tedy matice přechodu od nové báze ke kanonické bázi (ve sloupcích jsou kanonické souřadnice vektorů nové báze) jsou

$$Q = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

A skutečně

$$A' = Q \cdot A \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Při hledání vlastních vektorů tedy hledáme jádra lineárních transformací $f - \lambda \cdot \mathrm{id}$ pro jednotlivé hodnoty λ.

Pro $\lambda_1 = 1$ je $(f - \mathrm{id})(x^1, x^2) = (x^1 + x^2, 3x^1 + 3x^2)$ a jádro tohoto zobrazení je

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = [\![(1, -1)]\!].$$

Pro $\lambda_2 = 5$ je $(f - 5\,\mathrm{id})(x^1, x^2) = (-3x^1 + x^2, 3x^1 - x^2)$ a jádro tohoto zobrazení je

$$\mathrm{Ker}(f - 5\,\mathrm{id}) = [\![(1, 3)]\!].$$

□

Příklad. Mějme $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x^1, x^2) = (2x^1 + x^2, 2x^2)$ (ověřte, že f je lineární) a na $\mathbb{R}^2$ uvažujme kanonickou bázi.

Matici zobrazení získáme tak, že do sloupků budeme psát souřadnice obrazů vektorů báze (v tomto případě souřadnice jsou stejné jako vektory).

Obrazy bázových vektorů jsou $f(1, 0) = (2, 0)$, $f(0, 1) = (1, 2)$, takže matice zobrazení f je

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2$$

a jeho dvojnásobný kořen, tedy vlastní číslo je $\lambda = 2$.

Vlastní vektory, přesněji jejich souřadnice, které jsou však v tomto případě stejné jako vektory, získáme jako řešení soustavy lineárních rovnic $(A - 2E)x = 0$.

Řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{tedy} \qquad \begin{matrix} 0x^1 + 1x^2 = 0 \\ 0x^1 + 0x^2 = 0 \end{matrix}.$$

Množina všech řešení této soustavy je $[\![(1, 0)]\!]$ a příslušné vlastní vektory jsou tedy všechny skalární násobky vektoru $v = (1, 0)$. Vektor v se skutečně zobrazí na svůj 2-násobek, $f(1, 0) = (2, 0)$.

Jinak formulováno, opět, při hledání vlastních vektorů tedy hledáme jádro lineární transformace $f - 2 \cdot \mathrm{id}$, $(f - 2 \cdot \mathrm{id})(x^1, x^2) = (x^2, 0)$ a jádro tohoto zobrazení je

$$\mathrm{Ker}(f - 2 \cdot \mathrm{id}) = [\![(1, 0)]\!].$$

Z vlastních vektorů tedy nelze sestavit bázi prostoru $\mathbb{R}^2$ a podle Důsledku Tvrzení 12.3.1 transformace f není diagonalizovatelná. □

13. Jordanův kanonický tvar

Úmluva. V této kapitole V je vektorový prostor (obvykle konečněrozměrný) nad polem P a $f\colon V \to V$ je lineární transformace.

13.1. První rozklad lineární transformace

13.1.1. Anulující polynom a minimální polynom

Definice 13.1.1. Nechť $p \in P[x]$, $p \neq 0$. Polynom p je *anulující polynom* čtvercové matice A (resp. lineární transformace f), jestliže $p(A) = 0$ (resp. $p(f) = 0$).

Tvrzení 13.1.1 (Cayleyho-Hamiltonova věta)**.** *Charakteristický polynom matice je její anulující polynom.*

Důkaz. Pro libovolnou čtvercovou matici B jsme v zimním semestru odvodili vztah $B \cdot \operatorname{adj} B = \det B \cdot E$. Dosaďme za B matici $A - xE$:

$$(A - xE) \cdot \operatorname{adj}(A - xE) = \chi_A(x) \cdot E. \tag{11}$$

Je-li matice A typu $n \times n$, pak její charakteristický polynom χ_A je polynomem stupně n, řekněme $\chi_A = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$. Dále je (z definice adjungované matice) jasné, že prvky matice $\operatorname{adj}(A - xE)$ jsou polynomy stupně $n-1$ v x. Sdružíme-li sčítance s týmiž mocnimani x, získáme vyjádření $\operatorname{adj}(A - xE) = C_{n-1}x^{n-1} + \dots + C_1 x + C_0$, kde C_i jsou čtvercové matice typu $n \times n$.

Po dosazení do (11) máme

$$(A - xE) \cdot (C_{n-1}x^{n-1} + \dots + C_1 x + C_0) = (c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0) \cdot E,$$

tj.

$$\begin{aligned} &- C_{n-1}x^n + (AC_{n-1} - C_{n-2})x^{n-1} + \dots + (AC_1 - C_0)x + AC_0 = \\ &\quad = c_n E x^n + \dots + c_1 E x + c_0 E. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x obdržíme

$$\begin{aligned} &- C_{n-1} = c_n E, \\ &- C_{n-2} + AC_{n-1} = c_{n-1}E, \\ &\quad \vdots \\ &- C_0 + AC_1 = c_1 E, \\ &AC_0 = c_0 E. \end{aligned}$$

Vynásobíme-li i-tou rovnost $(n+1-i)$-tou mocninou A^{n+1-i} matice A a vzniklé rovnosti sečteme, získáme

$$0 = c_n A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0 E,$$

což se mělo dokázat. □

Důsledek. *Charakteristický polynom lineární transformace je její anulující polynom.*

Příklad. Matice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

má charakteristický polynom $\chi_A = x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$, ale $q = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ je také anulující polynom matice A (ověřte). □

Poslední příklad ukazuje, že charakteristický polynom může mít netriviálního dělitele, který je rovněž anulujícím polynomem. Ukažme, že mezi anulujícími polynomy existuje jeden, který dělí všechny ostatní.

Definice 13.1.2. Anulující polynom se nazývá *minimální polynom*, je-li normovaný a nejmenšího stupně ze všech anulujících polynomů.

Tvrzení 13.1.2. *Každý anulující polynom je dělitelný minimálním polynomem.*

Důkaz. Buď f anulující polynom matice A, buď g minimální polynom matice A. Dělme se zbytkem: $f = qg + r$, kde buď $r = 0$ nebo $\deg r < \deg g$. Do rovnosti dosadíme A a dostaneme

$$0 = f(A) = q(A)g(A) + r(A) = r(A),$$

protože f a g jsou anulující polynomy. Kdyby $r \neq 0$, byl by to anulující polynom nižšího stupně než minimální polynom g, což je spor, a proto $r = 0$ a g je dělitelem f. □

Důsledek. *Ke každé lineární transformaci konečněrozměrného vektorového prostoru resp. ke každé čtvercové matici existuje minimální polynom a je jediný.*

Cvičení. Dokažte jednoznačnost minimálního polynomu. □

13.1.2. Invariantní podprostory

Je-li $U \subseteq V$ podprostor, pak symbolem fU označujeme jeho obraz při zobrazení f, to jest, podprostor $\{f(u) |\ u \in U\}$.

Definice 13.1.3. Podprostor $U \subseteq V$ je *invariantní* vzhledem k lineární transformaci f, jestliže $fU \subseteq U$, tj. když pro každé $u \in U$ je $f(u) \in U$.

Je-li U invariantní podprostor, pak zobrazení $U \to U$, zadané předpisem $u \mapsto f(u)$, nazýváme *restrikce* (česky *ohraničení* nebo *zúžení*) lineárního zobrazení f na invariantní podprostor U. Značí se $f|_U : U \to U$ a je zřejmě opět lineární (ověřte).

Příklad. (1) Celý prostor V a nulový podprostor jsou invariantní podprostory vzhledem ke každé lineární transformaci.

(2) Je-li $f : v \mapsto cv$, pak je každý podprostor invariantní.

(3) Je-li u vlastní vektor s vlastní hodnotou c, pak $[\![u]\!]$ je invariantní podprostor a $f|_{[\![u]\!]}$ je zobrazení $v \mapsto cv$.

(4) Mějme rotaci φ: $E^3 \to E^3$ kolem zvolené pevné osy L procházející počátkem 0 o úhel $\alpha \in (0, 2\pi)$. Invariantní podprostory jsou nulový podprostor $\{0\}$, osa rotace L, její ortogonální doplněk $L^\perp$ (rovina procházející počátkem kolmo k L) a celý prostor E^3. Libovolný vektor $u \in L$ se zobrazí sám na sebe, proto $\varphi|_L$ je identické zobrazení id_L. Libovolný vektor $v \in L^\perp$ zůstane v rovině $L^\perp$ a $\varphi|_{L^\perp}$ je otáčení roviny $L^\perp$ o úhel α.

(5) Mějme zrcadlení ζ v prostoru E^3 vzhledem k rovině U procházející počátkem 0. Invariantní podprostory jsou nulový podprostor $\{0\}$, rovina U a každý její podprostor $V \subseteq U$, ortogonální doplněk $U^\perp$ (přímka procházející počátkem kolmo k U) a celý prostor E^3. Zobrazení $\zeta|_V$ je identické zobrazení id_V. Zobrazení $\zeta|_{U^\perp}$ je zrcadlení přímky $U^\perp$ vzhledem k počátku 0. □

Cvičení. (1) Jednorozměrný podprostor $[\![u]\!]$, $u \neq 0$, je invariantní právě tehdy, když u je vlastní vektor. Dokažte.

(2) Průnik a součet invariantních podprostorů jsou invariantní podprostory. Dokažte.

(3) $\operatorname{Ker} f$ je invariantní podprostor. Dokažte. Co je $f|_{\operatorname{Ker} f}$?

(4) $\operatorname{Im} f$ je invariantní podprostor. Dokažte.

(5) Buď $v \in V$ libovolný vektor. Dokažte, že $[\![v, f(v), f(f(v)), f(f(f(v))), \dots]\!]$ je invariantní podprostor.

(6) Nechť lineární transformace $f, g \colon V \to V$ komutují, to jest, $f \circ g = g \circ f$. Buď $U \subseteq V$ invariantní podprostor vzhledem k transformaci f. Pak gU je též invariantní podprostor vzhledem k transformaci f. $\square$