4. přednáška, 11. 3. 2024

Tvrzení 11.4.2. *Buďte U, V, W vektorové prostory, $(u_1, \dots, u_m)$ báze U, $(v_1, \dots, v_n)$ báze V, $(w_1, \dots, w_p)$ báze W. Buďte $\alpha\colon U \to V$, $\beta\colon V \to W$ lineární zobrazení. Buď A matice zobrazení α vzhledem k bázím $(u_1, \dots, u_m)$ a $(v_1, \dots, v_n)$, buď B matice zobrazení β vzhledem k bázím $(v_1, \dots, v_n)$ a $(w_1, \dots, w_p)$. Potom BA je matice zobrazení $\beta \circ \alpha$ vzhledem k bázím $(u_1, \dots, u_m)$ a $(w_1, \dots, w_p)$.*

Důkaz. Jelikož $\alpha(u_i) = \sum_j A_i^j v_j$ a $\beta(v_j) = \sum_k B_j^k w_k$, tak

$$\begin{aligned}(\beta \circ \alpha)(u_i) = \beta(\alpha(u_i)) = \beta\left(\sum\nolimits_j A_i^j v_j\right) = \sum\nolimits_j A_i^j \beta(v_j) = \sum\nolimits_j A_i^j \sum\nolimits_k B_j^k w_k = \\ = \sum\nolimits_{j,k} A_i^j B_j^k w_k = \sum\nolimits_k \sum\nolimits_j A_i^j B_j^k w_k = \\ = \left(\sum\nolimits_j A_i^j B_j^1\right) w_1 + \dots + \left(\sum\nolimits_j A_i^j B_j^p\right) w_p.\end{aligned}$$

Čili v k-tém řádku i-tého sloupku matice zobrazení $\beta \circ \alpha$ je $\sum_j A_i^j B_j^k = \sum_j B_j^k A_i^j$, což je totéž, co dostaneme při součinu $B \cdot A$. □

Tvrzení 11.4.3. *Buď α izomorfismus a A jeho matice vzhledem k nějakým bázím. Pak A je invertibilní a A^{-1} je matice inverzního izomorfismu α^{-1}.*

Důkaz. Buď $\alpha\colon U \to V$ a buď B matice lineárního zobrazení $\alpha^{-1}\colon V \to U$ vzhledem k příslušným bázím. Matice lineárního zobrazení $\alpha^{-1} \circ \alpha = \mathrm{id}_U$ vzhledem k bázi prostoru U je jednotková matice E a podle předchozího tvrzení je to matice BA. Čili, $BA = E$, A je tedy invertibilní a $A^{-1} = B$. □

Důsledek. *Každá matice přechodu od báze k bázi je invertibilní.*

Důkaz. Podle uvedených definic matice přechodu je totéž co matice identity, což je izomorfismus. □

Tvrzení 11.4.4. *Buď U vektorový prostor se starou bází $(u_1, \dots, u_n)$ a novou bází $(u'_1, \dots, u'_n)$, buď Q matice přechodu od staré báze k nové bázi. Buď V vektorový prostor se starou bází $(v_1, \dots, v_m)$ a novou bází $(v'_1, \dots, v'_m)$, buď R matice přechodu od staré báze k nové bázi. Buď $\alpha\colon U \to V$ lineární zobrazení, buď A matice zobrazení α vzhledem k bázím $(u_1, \dots, u_n)$ a $(v_1, \dots, v_m)$ a buď A' matice zobrazení α vzhledem k bázím $(u'_1, \dots, u'_n)$ a $(v'_1, \dots, v'_m)$. Pak*

$$A' = RAQ^{-1}.$$

Důkaz. Situaci můžeme znázornit diagramem

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{matrix}\mathrm{U}\\(u_1,\dots,u_n)\end{matrix}} \arrow[r, "\alpha", "A"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_U"', "Q"] & \boxed{\begin{matrix}\mathrm{V}\\(v_1,\dots,v_m)\end{matrix}} \arrow[d, "\mathrm{id}_V"', "R"] \\
\boxed{\begin{matrix}\mathrm{U}\\(u'_1,\dots,u'_n)\end{matrix}} \arrow[r, "\alpha", "A'"'] & \boxed{\begin{matrix}\mathrm{V}\\(v'_1,\dots,v'_m)\end{matrix}}
\end{tikzcd}$$

V rozích stojí vektorové prostory s vyznačenými bázemi, šipky označují lineární zobrazení a jsou u nich uvedeny také matice těchto zobrazení. Platí $\alpha \circ \mathrm{id}_U = \mathrm{id}_V \circ \alpha$ a také $\alpha = \mathrm{id}_V \circ \alpha \circ \mathrm{id}_U^{-1}$. Podle Tvrzení 11.4.2 o matici složeného zobrazení potom

$$A'Q = RA \quad \text{a také} \quad A' = RAQ^{-1}.$$ □

Příklad. Mějme $\alpha\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$, $f \mapsto f'$. Je to tedy zobrazení z prostoru polynomů stupně nejvýše 2 do prostoru polynomů stupně nejvýše 1, které polynomu přiřazuje jeho derivaci.

(1) Nejprve uvažujme (staré) báze $(1, x, x^2)$ v $\mathbb{R}_2[x]$ a $(1, x)$ v $\mathbb{R}_1[x]$. Ověřte, že jsou to báze. Najdeme obrazy vektorů báze $(1, x, x^2)$ při zobrazení α a jejich souřadnice v bázi $(1, x)$.

$$\begin{aligned} \alpha(1) &= 0, && \text{souřadnice vektoru } 0 \text{ v bázi } (1,x) \text{ jsou } (0,0);\\ \alpha(x) &= 1, && \text{souřadnice vektoru } 1 \text{ v bázi } (1,x) \text{ jsou } (1,0);\\ \alpha(x^2) &= 2x, && \text{souřadnice vektoru } 2x \text{ v bázi } (1,x) \text{ jsou } (0,2). \end{aligned}$$

Matice zobrazení α vzhledem k bázím $(1, x, x^2)$ a $(1, x)$ tedy je

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Nyní uvažujme (nové) báze $(x^2, x+1, x)$ v $\mathbb{R}_2[x]$ a $(x+1, 1)$ v $\mathbb{R}_1[x]$. Ověřte, že jsou to báze. Najdeme obrazy vektorů báze $(x^2, x+1, x)$ při zobrazení α a jejich souřadnice v bázi $(x+1, 1)$.

$$\begin{aligned} \alpha(x^2) &= 2x, && \text{souřadnice vektoru } 2x \text{ v bázi } (x+1,1) \text{ jsou } (2,-2);\\ \alpha(x+1) &= 1, && \text{souřadnice vektoru } 1 \text{ v bázi } (x+1,1) \text{ jsou } (0,1);\\ \alpha(x) &= 1, && \text{souřadnice vektoru } 1 \text{ v bázi } (x+1,1) \text{ jsou } (0,1). \end{aligned}$$

Matice zobrazení α vzhledem k bázím $(x^2, x+1, x)$ a $(x+1, 1)$ tedy je

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Například, $\alpha(3x^2 + 2x + 7) = 6x + 2$. Vektor $3x^2 + 2x + 7$ má staré souřadnice $x = (7, 2, 3)$ a nové souřadnice $x' = (3, 7, -5)$. Vektor $6x + 2$ má staré souřadnice $y = (2, 6)$ a nové souřadnice $y' = (6, -4)$. Ověřte. A platí

$$A_1 \cdot x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = y$$

a

$$A_2 \cdot x' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = y'.$$

Matice přechodu od staré báze $(1, x, x^2)$ k nové bázi $(x^2, x+1, x)$ v $\mathbb{R}_2[x]$ je

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice přechodu od staré báze $(1, x)$ k nové bázi $(x+1, 1)$ v $\mathbb{R}_1[x]$ je

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A platí

$$Q_2 \cdot A_1 \cdot Q_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A_2. \qquad \square$$

11.5. Algebraická struktura na množině lineárních zobrazení

Definice 11.5.1. Buďte U, V vektorové prostory nad polem P a $f, g\colon U \to V$ zobrazení.

(1) Zobrazení $f + g\colon U \to V$, zadané předpisem

$(f + g)(u) = f(u) + g(u)$

pro libovolný vektor $u \in U$, je *součet* zobrazení f a g.

(2) Buď $c \in P$. Zobrazení $cf\colon U \to V$, zadané předpisem

$(cf)(u) = c \cdot f(u)$

pro libovolný vektor $u \in U$, je *c-násobek* zobrazení f.

Tvrzení 11.5.1. *Buďte U, V vektorové prostory nad polem P, $f, g\colon U \to V$ lineární zobrazení a $c \in P$. Pak zobrazení $f + g$, cf jsou lineární.*

Důkaz. Cvičení. $\square$

Buďte U, V vektorové prostory nad polem P. Množinu všech lineárních zobrazení z U do V označme $\mathrm{Hom}_P(U, V)$. Tedy

$$\mathrm{Hom}_P(U, V) = \{f\colon U \to V \mid f \text{ je lineární zobrazení nad polem } P\}.$$

Tvrzení 11.5.2. *Buďte U, V vektorové prostory nad polem P. Pak množina $\mathrm{Hom}_P(U, V)$ s operacemi sčítání zobrazení a násobení zobrazení skalárem je vektorový prostor nad polem P.*

Důkaz. Cvičení. $\square$

Tvrzení 11.5.3. *Buďte U, V vektorové prostory nad polem P, $c \in P$, $f, g\colon U \to V$ lineární zobrazení a A, B jejich matice vzhledem ke zvoleným bázím. Pak*

(1) $A + B$ je matice lineárního zobrazení $f + g$ vzhledem ke stejným bázím,

(2) cA je matice lineárního zobrazení cf vzhledem ke stejným bázím.

Důkaz. Cvičení. $\square$

Tvrzení 11.5.4. *Buďte U, V konečněrozměrné vektorové prostory nad polem P, $\dim U = n$ a $\dim V = m$. Pak vektorový prostor $\mathrm{Hom}_P(U, V)$ je izomorfní s prostorem $P^{m\times n}$ všech matic typu $m \times n$ nad polem P.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme tak, že najdeme příslušný izomorfismus. Buďte u báze U, v báze V a $\varphi\colon \mathrm{Hom}_P(U, V) \to P^{m\times n}$ zobrazení, které každému lineárnímu zobrazení $f\colon U \to V$ přiřadí jeho matici vzhledem k bázím u a v.

Potom φ je bijekce, protože každá matice typu $m \times n$ je maticí právě jednoho lineárního zobrazení $U \to V$ vzhledem k uvedeným bázím (ověřte podrobně). Navíc, podle předchozího tvrzení φ je lineární, protože matice zobrazení $f + g$ je součet matic jednotlivých zobrazení f a g a matice zobrazení cf je c-násobek matice zobrazení f. $\square$

Definice 11.5.2. Lineární zobrazení $V \to V$ je *lineární transformace* vektorového prostoru V nebo také *lineární operátor* na vektorovém prostoru V.

Na množině $\mathrm{Hom}_P(V,V)$ můžeme navíc uvažovat binární operaci $\circ$ skládání lineárních transformací s neutrálním prvkem id_V (množina s asociativní binární operací s neutrálním prvkem je *monoid*).

Tvrzení 11.5.5. *Buď V vektorový prostor nad polem P. Pak pro libovolná $f,g,h \in \mathrm{Hom}_P(V,V)$ a $c \in P$ platí*

$$f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h,$$
$$(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h,$$
$$f \circ (cg) = (cf) \circ g = c(f \circ g).$$

Důkaz. Cvičení. □

Algebraická struktura, která je současně monoid i vektorový prostor nad polem P a platí pro ni identity uvedené v předchozím tvrzení, je *asociativní P-algebra.* Tudíž, $\mathrm{Hom}_P(V,V)$ je asociativní P-algebra.

Jiný příklad asociativní P-algebry je množina $P^{n\times n}(= \mathrm{gl}(n,P))$ všech čtvercových matic typu $n \times n$ nad polem P vzhledem k binárním operacím násobení a sčítání matic a k operaci násobení skalárem (ověřte).

Podle předchozích tvrzení v konečněrozměrném případě P-algebra $\mathrm{Hom}_P(V,V)$ je izomorfní P-algebře $\mathrm{gl}(n,P)$.

Pro libovolné celé nezáporné číslo k zaveďme lineární transformaci $f^k \colon V \to V$ předpisem

$$f^k(v) = \underbrace{f(f(\cdots f}_{k}(v)\cdots)) \text{ pro libovolné } v \in V, \text{ tj. } f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k}.$$

Tedy, $f^0 = \mathrm{id}_V$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$ a $f^{n+1} = f \circ f^n$.

Definice 11.5.3. Buď $p = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \in P[x]$ polynom. Buď $f \colon V \to V$ lineární transformace vektorového prostoru V nad polem P a A čtvercová matice nad polem P. Položme

$$p(f) = a_m f^m + \cdots + a_1 f + a_0 \,\mathrm{id}_V,$$
$$p(A) = a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 E,$$

kde E je jednotková matice stejného rozměru jako matice A.
Lineární transformace $p(f)$, resp. matice $p(A)$ vznikla *dosazením lineární transformace f*, resp. *matice A do polynomu p.*

Hodnota transformace $p(f)$ ve vektoru $v \in V$ se zapisuje $p(f)(v)$.

Příklad. Nechť $p = x^2 - 2x + 2$. Pak pro libovolnou lineární transformaci $f \colon V \to V$ máme $p(f) = f^2 - 2f + 2\,\mathrm{id}$ a pro libovolný vektor $v \in V$ máme $p(f)(v) = f(f(v)) - 2f(v) + 2v$. □

Tvrzení 11.5.6. *Buď p polynom a buď A matice lineární transformace f vzhledem k nějaké bázi. Pak $p(A)$ je matice lineární transformace $p(f)$ vzhledem k téže bázi.*

Důkaz. Cvičení. □

Tvrzení 11.5.7. *Buďte p,q polynomy. Pro libovolnou lineární transformaci f a libovolnou čtvercovou matici A platí*

$$(p+q)(f) = p(f) + q(f), \qquad (pq)(f) = p(f) \circ q(f),$$
$$(p+q)(A) = p(A) + q(A), \qquad (pq)(A) = p(A)q(A).$$

Důkaz. Cvičení. □

Důsledek. *Buďte p, q polynomy. Pro libovolnou lineární transformaci f a pro libovolnou čtvercovou matici A platí*

$$p(f) \circ q(f) = q(f) \circ p(f), \qquad p(A)q(A) = q(A)p(A)$$

(říkáme, že $p(f)$ a $q(f)$ komutují a $p(A)$ a $q(A)$ komutují).

12. Vlastní vektory

Mějme lineární transformaci $f\colon V \to V$ a její matici A vzhledem k nějaké bázi. Obraz vektoru v při lineární transformací f^n můžeme najít tak, že spočteme jeho souřadnice, a to tak že souřadnice vektoru v vynásobíme maticí A^n, protože to je matice transformace f^n (vše samozřejmě vzhledem ke zvolené bázi). Je tedy žádoucí volit bázi prostoru tak, aby matice transformace byla co nejjednodušší, pokud možno diagonální, protože potom se její mocnina počítá velice jednoduše.

12.1. Definice, příklady

Při lineární transformaci $V \to V$ se každý vektor z prostoru V zobrazí na některý vektor opět z prostoru V. Může se tedy stát, že vektor se zobrazí na nějaký svůj skalární násobek.

Definice 12.1.1. Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace vektorového prostoru V nad polem P. Skalár $\lambda \in P$ je *vlastní hodnota* (v případě číselného pole P *vlastní číslo*) transformace f, jestliže existuje nenulový vektor $v \in V$ takový, že

$$f(v) = \lambda v.$$

Každý vektor $v \in V$ takový, že $f(v) = \lambda v$, kde λ je vlastní hodnota transformace f, je *vlastní vektor* transformace f příslušný vlastní hodnotě λ.

Analogicky jsou definovány vlastní vektory a vlastní hodnoty (čísla) čtvercové matice.

Definice 12.1.2. Buď A čtvercová matice řádu n nad polem P. Skalár $\lambda \in P$ je *vlastní hodnota* (*vlastní číslo*) matice A, jestliže existuje nenulový vektor (uspořádaná n-tice, sloupková matice) $x \in P^n$ takový, že

$$Ax = \lambda x.$$

Každý vektor $x \in P^n$ takový, že $Ax = \lambda x$, kde λ je vlastní hodnota matice A, je *vlastní vektor* matice A příslušný vlastní hodnotě λ.

Tedy, aby skalár λ byl vlastní hodnota, musí existovat nenulový vektor, který se zobrazí na svůj λ-násobek. Potom i nulový vektor je vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě λ.

Příklad. (1) Je-li V netriviální prostor (obsahuje nenulový vektor), pak pro identickou transformaci $\mathrm{id}\colon V \to V$, $\mathrm{id}(v) = v$, každý vektor $v \in V$ je vlastní s vlastní hodnotou 1, protože $\mathrm{id}(v) = 1 \cdot v$.

(2) Je-li V netriviální prostor, pak pro nulovou transformaci $0\colon V \to V$, $0(v) = 0$, každý vektor $v \in V$ je vlastní s vlastní hodnotou 0, protože $0(v) = 0 \cdot v$.

(3) Je-li V netriviální prostor a c skalár, pak pro transformaci $f_c\colon V \to V$, $f_c(v) = cv$, každý vektor $v \in V$ je vlastní s vlastní hodnotou c.

(4) Pro rovnoběžné promítání $E^3 \to E^3$ podél vektoru $v \neq 0$ na rovinu $U \subset E^3$ procházející počátkem, kde $v \notin U$, vektor v a všechny jeho násobky jsou vlastní vektory s vlastním číslem 0, každý vektor z U je vlastní vektor s vlastním číslem 1 a jiné vlastní vektory tato transformace nemá.

(5) Pro rotaci $E^2 \to E^2$ o úhel $0 \leq \varphi < 2\pi$:
(a) je-li $\varphi = 0$, pak jde o identickou transformaci a každý vektor je vlastní s vlastním číslem 1;
(b) je-li $\varphi = \pi$, pak jde o středovou symetrii $v \mapsto -v = (-1)v$ a každý vektor je vlastní

s vlastním číslem -1;
(c) v ostatních případech neexistuje žádný vlastní vektor.

(6) Rotace $E^3 \to E^3$ o úhel $0 \le \varphi < 2\pi$ kolem zvolené pevné osy L procházející počátkem. Označme $L^\perp$ rovinu procházející počátkem kolmo k L (tzv. ortogonální doplněk).
(a) Je-li $\varphi = 0$, pak jde o identickou transformaci a každý vektor je vlastní s vlastním číslem 1;
(b) je-li $\varphi = \pi$, pak každý vektor z L je vlastní s vlastním číslem 1, každý vektor z $L^\perp$ je vlastní s vlastním číslem -1 a žádný jiný vlastní vektor tato transformace nemá;
(c) v ostatních případech každý vektor z L je vlastní vektor s vlastním číslem 1 a žádný jiný vlastní vektor neexistuje.

(7) Buď V vektorový prostor všech hladkých funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mají spojité derivace všech řádů) a buď $\delta\colon V \to V$, $\delta(f) = f'$ transformace, která funkci f přiřadí její derivaci f'. Z matematické analýzy víme, že pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R}$ platí $(\mathrm{e}^{\lambda x})' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$, čili funkce $\mathrm{e}^{\lambda x}$ a každý její skalární násobek jsou vlastní vektory transformace δ s vlastním číslem λ.

Buď $f \in V$ libovolná funkce s vlastností $f' = \lambda f$. Potom

$$(f(x)\mathrm{e}^{-\lambda x})' = \lambda f(x)\mathrm{e}^{-\lambda x} - f(x)\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} = 0,$$

čili funkce $f(x)\mathrm{e}^{-\lambda x}$ je konstantní. Označíme-li $f(x)\mathrm{e}^{-\lambda x} = c$, dostaneme $f(x) = c\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, takže každá funkce s vlastností $f' = \lambda f$ je skalární násobek funkce $\mathrm{e}^{\lambda x}$. To znamená, že každé reálné číslo λ je vlastní číslo transformace δ a příslušné vlastní vektory jsou všechny skalární násobky funkce $\mathrm{e}^{\lambda x}$. □

Cvičení. Určete všechny vlastní vektory následujících lineárních transformací vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$. Návod: Pomozte si geometrickou interpretací v Gaussově rovině.

(1) Zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^*$, kde z^* je číslo komplexně sdružené k číslu z.
(2) Zobrazení $\mathrm{re}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \mathrm{re}\, z = \frac{1}{2}(z + z^*)$ (reálná část čísla z). □

12.2. Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů

Tvrzení 12.2.1. *Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace. Potom*

(1) skalár λ je vlastní hodnota transformace f právě tehdy, když $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ není injektivní;
(2) množina všech vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě λ transformace f je podprostor prostoru V.

Důkaz. Buďte $v \in V$ a λ skalár. Následující vztahy jsou ekvivalentní:

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda v \\ f(v) - \lambda v &= 0 \\ f(v) - (\lambda\,\mathrm{id}_V)(v) &= 0 \\ (f - \lambda\,\mathrm{id}_V)(v) &= 0 \\ v &\in \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) \end{aligned}$$

Takže λ je vlastní hodnota právě tehdy, když v $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)$ existuje nenulový vektor, což podle Tvrzení 11.2.2 je právě tehdy, když $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ není injektivní.

Z uvedeného navíc vyplývá, že množina všech vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě λ transformace f je $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)$, což je podprostor prostoru V. □

Obdobné trvrzení platí i pro vlastní hodnoty a vlastní vektory matice.

Tvrzení 12.2.2. *Buď A matice typu $n \times n$ nad polem P. Potom*

(1) skalár λ je vlastní hodnota matice A právě tehdy, když $\det(A - \lambda E_n) = 0$*;*
(2) množina všech vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě λ matice A je podprostor prostoru P^n.

Důkaz. Buďte $x \in P^n$ a λ skalár. Následující vztahy jsou ekvivalentní:

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ Ax - \lambda x &= 0 \\ Ax - \lambda E_n x &= 0 \\ (A - \lambda E_n)x &= 0 \\ x &\in \operatorname{Ker}(A - \lambda E_n) \end{aligned}$$

Takže λ je vlastní hodnota právě tehdy, když v $\operatorname{Ker}(A - \lambda E_n)$ existuje nenulový vektor, tedy homogenní soustava $(A - \lambda E_n)x = 0$ má nenulové řešení, a to má právě tehdy, když matice $A - \lambda E_n$ je singulární, čili $\det(A - \lambda E_n) = 0$.

Z uvedeného navíc vyplývá, že množina všech vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě λ matice A je množina všech řešení homogenní soustavy rovnic o n neznámých, což je podprostor prostoru P^n. $\square$

Tvrzení 12.2.3. *Buď A matice typu $n\times n$ nad polem P. Potom* $\det(A-\lambda E_n)$ *je polynom neurčité λ stupně n s koeficienty z pole P.*

Důkaz. Cvičení. $\square$

Tvrzení 12.2.4. *Matice typu $n \times n$ má nejvýše n vlastních hodnot.*

Důkaz. Vlastní hodnoty jsou kořeny polynomu $\det(A-\lambda E_n)$ stupně n a polynom stupně n má nejvýše n kořenů. $\square$

Definice 12.2.1. Buď A čtvercová matice. Polynom

$$\chi_A = \det(A - \lambda E)$$

je *charakteristický polynom* matice A a rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

je *charakteristická rovnice* matice A.

Cvičení. Buď $\chi_A = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0$ charakteristický polynom matice A typu $n \times n$. Ukažte, že $c_n = (-1)^n$, $c_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$ a $c_0 = \det A$. $\square$

Podle Tvrzení 12.2.2 je λ vlastní hodnota matice A právě tehdy, když je kořenem příslušného charakteristického polynomu. Vlastní vektory příslušné vlastní hodnotě λ získáme jako řešení soustavy lineárních rovnic $(A - \lambda E)x = 0$.

Pro lineární zobrazení $f\colon U \to V$, bázi $u = (u_1, \ldots, u_n)$ prostoru U a bázi $v = (v_1, \ldots, v_m)$ prostoru V máme definovánu matici zobrazení f vzhledem k bázím u a v. Jedná-li se o lineární transformaci f, tedy $U = V$, a stejné báze, tedy $u = v$, budeme příslušnou matici stručněji nazývat *matice lineární transformace f vzhledem k bázi v.*