3. přednáška, 4. 3. 2024

Jsou-li oba prostory U, V konečněrozměrné, pak se číslo $\dim \operatorname{Ker} f$ nazývá *defekt* a číslo $\dim \operatorname{Im} f$ *hodnost* lineárního zobrazení. Platí o nich následující tvrzení.

Tvrzení 11.2.3. *Buďte U, V konečněrozměrné vektorové prostory a $f\colon U \to V$ lineární zobrazení. Pak*

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim U.$$

Důkaz. Označme $\dim U = n$ a $\dim \operatorname{Ker} f = m$. Buď $(u_1, \dots, u_m)$ báze $\operatorname{Ker} f$ a doplňme ji vektory $u_{m+1}, \dots, u_n$ do báze U.

Potom vektory $f(u_1), \dots, f(u_n)$ generují $f(U) = \operatorname{Im} f$ (ověřte podrobně), přičemž $f(u_1) = \dots = f(u_m) = 0$ a nulový vektor můžeme z množiny generátorů bez následků vyloučit. Zůstane nám tedy množina generátorů $\{f(u_{m+1}), \dots, f(u_n)\}$.

Ukažme, že tato množina je lineárně nezávislá. Nechť

$$x_{m+1} f(u_{m+1}) + \dots + x_n f(u_n) = 0.$$

Potom $f(x_{m+1}u_{m+1} + \dots + x_n u_n) = 0$, čili $x_{m+1}u_{m+1} + \dots + x_n u_n \in \operatorname{Ker} f$ a

$$x_{m+1}u_{m+1} + \dots + x_n u_n = x_1 u_1 + \dots + x_m u_m$$

pro vhodné koeficienty $x_1, \dots, x_m$. Z lineární nezávislosti množiny $\{u_1, \dots, u_n\}$ vyplývá, že všechny koeficienty $x_1, \dots, x_n$ jsou nulové, zejména $x_{m+1} = \dots = x_n = 0$ a množina $\{f(u_{m+1}), \dots, f(u_n)\}$ je tedy lineárně nezávislá.

Máme tedy bázi podprostoru $\operatorname{Im} f$ tvořenou $n-m$ vektory, takže $\dim \operatorname{Im} f = n - m = \dim U - \dim \operatorname{Ker} f$. □

11.3. Izomorfismy

Stejně jako u jiných algebraických struktur, bijektivní homomorfismy se nazývají izomorfismy.

Definice 11.3.1. *Izomorfismus* vektorových prostorů je bijektivní lineární zobrazení.

Tvrzení 11.3.1. *Buďte $f\colon U \to V$ lineární zobrazení a $(e_1, \dots, e_n)$ báze U. Potom*

(1) f je injektivní právě tehdy, když množina $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ je lineárně nezávislá;
(2) f je surjektivní právě tehdy, když vektory $f(e_1), \dots, f(e_n)$ generují V.

Důkaz. (1) Předpokládejme, že f je injektivní. Nechť

$$x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) = 0.$$

Potom $f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = 0$, tj. $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \operatorname{Ker} f$. Z injektivnosti f podle Tvrzení 11.2.2 vyplývá, že $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = 0$, a z lineární nezávislosti množiny $\{e_1, \dots, e_n\}$ vyplývá, že $x_1 = \dots = x_n = 0$. Tedy, množina $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ je lineárně nezávislá.

Předpokládejme, že množina $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ je lineárně nezávislá a $f(u_1) = f(u_2)$ pro nějaké $u_1, u_2 \in U$. Tedy $u_1 = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $u_2 = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ a

$$\begin{aligned} 0 = f(u_1) - f(u_2) &= x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) - y_1 f(e_1) - \dots - y_n f(e_n) = \\ &= (x_1 - y_1) f(e_1) + \dots + (x_n - y_n) f(e_n). \end{aligned}$$

Z lineární nezávislosti množiny $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ dostaneme $x_1 - y_1 = \dots = x_n - y_n = 0$, čili $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$. Takže $u_1 = u_2$ a f je injektivní.

(2) Cvičení. □

Důsledek. *Buďte $f\colon U \to V$ lineární zobrazení a $(e_1, \dots, e_n)$ báze U. Potom f je izomorfismus právě tehdy, když $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ je báze V.*

Tvrzení 11.3.2. *Buď $f\colon U \to V$ izomorfismus. Pak $f^{-1}\colon V \to U$ je také izomorfismus.*

Důkaz. Zobrazení f je bijektivní, takže k němu existuje inverzní zobrazení f^{-1}, a to je také bijektivní. Zbývá dokázat, že je lineární. Buďte $v_1, v_2 \in V$. Díky bijektivnosti zobrazení f existují $u_1, u_2 \in U$ takové, že $f(u_1) = v_1$ a $f(u_2) = v_2$. Potom

$$\begin{aligned} f^{-1}(v_1 + v_2) &= f^{-1}(f(u_1) + f(u_2)) = \\ &= f^{-1}(f(u_1 + u_2)) = \\ &= u_1 + u_2 = \\ &= f^{-1}(v_1) + f^{-1}(v_2). \end{aligned}$$

Důkaz homogenity necháme jako cvičení. □

Definice 11.3.2. Vektorové prostory, mezi nimiž existuje izomorfismus, jsou *izomorfní*. Zapisujeme $U \cong V$.

Cvičení. Dokažte, že relace „být izomorfní“ je relace ekvivalence (reflexivní, symetrická, tranzitivní). □

Cvičení. (1) Homotetie $f_c\colon a \mapsto ca$ z příkladu (3) je izomorfismus právě tehdy, když $c \neq 0$.

(2) Homomorfismus $z \mapsto z^*$ z příkladu (8) je izomorfismus $\mathbb{C} \cong \mathbb{C}$.

(3) Homomorfismus re z příkladu (9) není izomorfismus (není injektivní).

(4) Otáčení je izomorfismus. Rovnoběžné promítání $E^3 \to E^2$ není izomorfismus. □

Cvičení. Buď $f\colon U \to V$ izomorfismus konečněrozměrných prostorů. Jestliže $(u_1, \dots, u_n)$ je báze prostoru U, pak $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ je báze prostoru V. Dokažte. Totéž pro množiny generátorů, resp. lineárně nezávislé množiny. □

Izomorfní prostory se z hlediska lineární algebry liší jen v označení prvků a operací, není mezi nimi žádný rozdíl odhalitelný prostředky lineární algebry.

V konečněrozměrném případě je situace obzvlášť příjemná: každý prostor je izomorfní s některým prostorem P^n.

Tvrzení 11.3.3. *Každý konečněrozměrný vektorový prostor U nad polem P je izomorfní s prostorem $P^{\dim U}$.*

Důkaz. Zobrazení $U \to P^{\dim U}$, které vektorům přiřazuje jejich souřadnice vzhledem k pevně zvolené bázi, je izomorfismus (ověřte podrobně). □

Počítání se souřadnicemi vektorů z U je tedy počítání v izomorfním prostoru $P^{\dim U}$. Na druhé straně, tento izomorfismus závisí na volbě báze, a to je důvod, proč není vhodné prostory U a $P^{\dim U}$ ztotožňovat.

Tvrzení 11.3.4. *Konečněrozměrné vektorové prostory nad stejným polem jsou izomorfní právě tehdy, když mají stejnou dimenzi.*

Důkaz. Buď $f\colon U \to V$ izomorfismus (mimo jiné, tedy injekce a surjekce). Podle Tvrzení 11.2.2 máme $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ a $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$, a proto díky Tvrzení 11.2.3 $\dim U = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.

Jestliže $\dim U = \dim V$, pak $U \cong P^{\dim U} = P^{\dim V} \cong V$. □

11.3.1. Přímé součty vektorových (pod)prostorů

Už známe přímý součet prostorů a přímý součet podprostorů. Jsou-li $U_1, \dots, U_n$ podprostory vektorového prostoru U, pak mohou existovat dva různé přímé součty, $U_1 \dot{+} \dots \dot{+} U_n$ a $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$. První z nich je podprostor prostoru U, kdežto druhý není. Nicméně, podle následujícího tvrzení tyto přímé součty jsou izomorfní.

Tvrzení 11.3.5. *Buďte $U_1, \dots, U_n$ podprostory konečněrozměrného vektorového prostoru U. Pak následující výroky jsou ekvivalentní:*

(1) součet $U_1 + \dots + U_n$ je přímý;
(2) $U_1 + \dots + U_n \cong U_1 \oplus \dots \oplus U_n$.

Důkaz. Předpokládejme, že součet $U_1 + \dots + U_n$ je přímý. Buď $p\colon U_1 \oplus \dots \oplus U_n \to U_1 + \dots + U_n$, $(u_1, \dots, u_n) \mapsto u_1 + \dots + u_n$. Zobrazení p je lineární (cvičení). Jelikož součet $U_1 + \dots + U_n$ je přímý, každé $u \in U_1 + \dots + U_n$ lze zapsat právě jedním způsobem jako $u = u_1 + \dots + u_n$, kde $u_i \in U_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$. Můžeme tedy definovat zobrazení $U_1 + \dots + U_n \to U_1 \oplus \dots \oplus U_n$, $u \mapsto (u_1, \dots, u_n)$. Toto zobrazení je inverzní k p, tudíž p je bijekce, a tedy izomorfismus.

Předpokládejme, že $U_1 + \dots + U_n \cong U_1 \oplus \dots \oplus U_n$. Potom $\dim(U_1 + \dots + U_n) = \dim(U_1 \oplus \dots \oplus U_n) = \dim U_1 + \dots + \dim U_n$ a podle Tvrzení 10.3.3 součet $U_1 + \dots + U_n$ je přímý. □

Cvičení. Dokažte, že zobrazení p z předchozího důkazu je lineární. □

Cvičení. Pro každé $i = 1, \dots, n$ zobrazení $\pi_i\colon U_1 \oplus \dots \oplus U_n \to U_i$ zadané předpisem $(u_1, \dots, u_n) \mapsto u_i$ se nazývá i-tá projekce.

Pro každé $i = 1, \dots, n$ zobrazení $\iota_i\colon U_i \to U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ zadané předpisem $u \mapsto (0, \dots, 0, u, 0, \dots, 0)$, kde u stojí na i-tém místě, se nazývá vložení i-tého sčítance.

Ukažte, že projekce π_i a vložení ι_i jsou lineární zobrazení. Spočtěte $\pi_i \circ \iota_j$. □

11.4. Matice lineárního zobrazení

V příkladu (7) v 11.1 pro každou matici A typu $m \times n$ nad polem P je $f_A\colon P^n \to P^m$, $x \mapsto Ax$, lineární zobrazení.

Na druhou stranu, pro každé lineární zobrazení $f\colon P^n \to P^m$ existuje jediná matice A taková, že $f = f_A$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ buď e_i i-tý vektor kanonické báze P^n, tedy $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, kde 1 je na i-tém místě. Potom pro libovolné $x = (x^1, \dots, x^n) \in P^n$ platí

$$f(x) = f(x^1 e_1 + \dots + x^n e_n) = x^1 f(e_1) + \dots + x^n f(e_n).$$

Čili pro matici A, jejíž sloupky jsou $f(e_1), \dots, f(e_n)$, platí $f(x) = Ax$ a $f = f_A$.

Obdobně lze libovolnému lineárnímu zobrazení mezi konečněrozměrnými vektorovými prostory přiřadit matici, která toto zobrazení popisuje, a to sice matici reprezentující příslušné lineární zobrazení mezi prostory souřadnic vektorů vzhledem ke zvoleným bázím vektorových prostorů.

Definice 11.4.1. Buďte U, V vektorové prostory, $(u_1, \dots, u_n)$ báze U a $(v_1, \dots, v_m)$ báze V. Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení. Matice A typu $m \times n$, jejíž i-tý sloupek je tvořen souřadnicemi vektoru $f(u_i) \in V$ v bázi $(v_1, \dots, v_m)$, je *matice lineárního zobrazení* f vzhledem k bázím $(u_1, \dots, u_n)$ a $(v_1, \dots, v_m)$.

Přesněji, A_i^j je j-tá souřadnice obrazu $f(u_i)$ v bázi $(v_1, \dots, v_m)$. Platí tedy

$$f(u_i) = \sum_j A_i^j v_j.$$

Tvrzení 11.4.1. *Buďte U, V vektorové prostory, $(u_1, \dots, u_n)$ báze U, $(v_1, \dots, v_m)$ báze V, $f\colon U \to V$ lineární zobrazení, $u \in U$, A matice f, $x = (x^1, \dots, x^n)$ souřadnice u, $y = (y^1, \dots, y^m)$ souřadnice $f(u) \in V$ vzhledem ke zvoleným bázím. Pak*

$$y = Ax.$$

Důkaz. Jelikož $u = \sum_i x^i u_i$, tak

$$f(u) = f\left(\sum\nolimits_i x^i u_i\right) = \sum\nolimits_i f(x^i u_i) = \sum\nolimits_i x^i f(u_i) = \sum\nolimits_i x^i \sum\nolimits_j A_i^j v_j =$$
$$= \sum\nolimits_j \sum\nolimits_i x^i A_i^j v_j = \left(\sum\nolimits_i x^i A_i^1\right) v_1 + \dots + \left(\sum\nolimits_i x^i A_i^m\right) v_m.$$

Čili j-tá souřadnice vektoru $f(u)$ v bázi $(v_1, \dots, v_m)$ je $y^j = \sum_i x^i A_i^j = \sum_i A_i^j x^i$, což je právě výsledek získávaný při násobení matic A a x. □

Příklad. Mějme $\alpha\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$, $f \mapsto f'$. Je to tedy zobrazení z prostoru polynomů stupně nejvýše 2 do prostoru polynomů stupně nejvýše 1, které polynomu přiřazuje jeho derivaci. Ověřte, že se jedná o lineární zobrazení.

V $\mathbb{R}_2[x]$ uvažujme bázi $(1, x, x^2)$ a v $\mathbb{R}_1[x]$ bázi $(1, x)$. Ověřte, že jsou to báze. Najdeme obrazy vektorů báze $(1, x, x^2)$ při zobrazení α a jejich souřadnice v bázi $(1, x)$.

$\alpha(1) = 0,$ souřadnice vektoru 0 v bázi $(1, x)$ jsou $(0, 0)$;

$\alpha(x) = 1,$ souřadnice vektoru 1 v bázi $(1, x)$ jsou $(1, 0)$;

$\alpha(x^2) = 2x,$ souřadnice vektoru $2x$ v bázi $(1, x)$ jsou $(0, 2)$.

Matice zobrazení α vzhledem k bázím $(1, x, x^2)$ a $(1, x)$ tedy je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Například, $\alpha(3x^2+2x+7) = 6x+2$. Vektor $3x^2+2x+7$ má v bázi $(1, x, x^2)$ souřadnice $x = (7, 2, 3)$ a vektor $6x + 2$ má v bázi $(1, x)$ souřadnice $y = (2, 6)$. Ověřte. A platí

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = y.$$ □

Příklad. Matice identického zobrazení $\mathrm{id}\colon U \to U$, $\mathrm{id}(u) = u$, vzhledem k bázím $(e_1, \dots, e_n)$ a $(e'_1, \dots, e'_n)$ (v tomto pořadí) je matice přechodu od báze $(e_1, \dots, e_n)$ k bázi $(e'_1, \dots, e'_n)$. □