2. přednáška, 26. 2. 2024

10.3. Přímý součet podprostorů

Definice 10.3.1. Buď V vektorový prostor nad polem P, buďte $U_1, \dots, U_n$ podprostory V. Součet $U_1 + \cdots + U_n$ je *přímý*, jestliže každý vektor $v \in U_1 + \cdots + U_n$ lze zapsat *právě jedním způsobem* jako součet $v = u_1 + \cdots + u_n$, kde $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$. Přímý součet zapisujeme s tečkami: $U_1 \dot{+} \cdots \dot{+} U_n$.

Příklad. Nechť $U_1 = \{(x, 0, 0) | \, x \in P\}$, $U_2 = \{(0, y, 0) | \, y \in P\}$, $U_3 = \{(0, 0, z) | \, z \in P\}$. Pak $P^3 = U_1 \dot{+} U_2 \dot{+} U_3$, protože libovolný vektor $u = (x, y, z) \in P^3$ má jediné vyjádření ve tvaru součtu $u = u_1 + u_2 + u_3$, kde $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, u_3 \in U_3$, a sice $(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)$. □

Tvrzení 10.3.1. *Buďte U_1, U_2 podprostory V. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $V = U_1 \dot{+} U_2$;
(ii) $V = U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2 = 0$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Je-li $V = U_1 \dot{+} U_2$, pak každý vektor $v \in V$ lze vyjádřit jako součet $v = u_1 + u_2$, kde $u_1 \in U_1$ a $u_2 \in U_2$, čili $V = U_1 + U_2$. Ukažme, že $U_1 \cap U_2 = 0$. Buď $v \in U_1 \cap U_2$. Pak máme dva rozklady vektoru v na sčítance z U_1 a U_2, a sice $v = 0 + v$ a $v = v + 0$. Totožnost obou rozkladů znamená, že $v = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Je-li $V = U_1 + U_2$, pak každý vektor $v \in V$ lze vyjádřit jako součet $v = u_1 + u_2$, kde $u_1 \in U_1$ a $u_2 \in U_2$. Dokážeme ještě jednoznačnost vektorů u_1, u_2: Pokud je u_1', u_2' jiná dvojice vektorů taková, že $v = u_1' + u_2'$, pak

$$0 = v - v = (u_1 - u_1') + (u_2 - u_2'),$$

a tedy $u_1 - u_1' = -(u_2 - u_2')$. Vektor $u_1 - u_1' \in U_1$ je roven vektoru $-(u_2 - u_2') \in U_2$, proto leží v průniku $U_1 \cap U_2$, což je nulový prostor. Tudíž, $u_1 - u_1' = 0$ a $u_2 - u_2' = 0$. □

Příklad. (1) $V = V \dot{+} 0$ pro libovolný vektorový prostor V.

(2) Prostor E^3 je přímým součtem $U \dot{+} L$, je-li $U \subset E^3$ libovolná rovina procházející počátkem a $L \subset E^3$ libovolná přímka procházející počátkem a neležící v U. □

V případě konečněrozměrných podprostorů máme jednoduché kritérium.

Tvrzení 10.3.2. *Buďte U_1, U_2 podprostory konečněrozměrného vektorového prostoru V takové, že $V = U_1 + U_2$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $V = U_1 \dot{+} U_2$;
(ii) $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$.

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Nechť $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$. Potom $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim V = 0$, čili $U_1 \cap U_2 = 0$. □

Cvičení. Buďte $V = U_1 \dot{+} U_2$, $(e_1^1, \dots, e_{m_1}^1)$ báze podprostoru U_1, $(e_1^2, \dots, e_{m_2}^2)$ báze podprostoru U_2. Pak $(e_1^1, \dots, e_{m_1}^1, e_1^2, \dots, e_{m_2}^2)$ je báze prostoru V. Dokažte. □

Cvičení. Buď $m < n$, buď $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$ báze vektorového prostoru V. Pak $V = [\![e_1, \dots, e_m]\!] \dot{+} [\![e_{m+1}, \dots, e_n]\!]$. Dokažte. □

Vzniká otázka, jak jednoduše rozeznat přímý součet n podprostorů při $n > 2$. Mohlo by se zdát, že prostor V je přímým součtem podprostorů $U_1, \dots, U_n$, jestliže je jejich součtem a podprostory $U_1, \dots, U_n$ mají po dvou nulový průnik. Následující příklad ukazuje, že to tak není:

Příklad. Prostor E^3 není přímým součtem $L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} U$, je-li U rovina procházející počátkem a jsou-li $L_1, L_2 \subset E^3$ různé přímky procházející počátkem, neležící v rovině U.

Skutečně, součet $L_1 + L_2$ je sice přímý, ale má nenulový průnik s rovinou U. Libovolný nenulový vektor $u = l_1 + l_2$ ležící v průniku $(L_1 + L_2) \cap U$ pak má dvojí vyjádření: jako součet $l_1 + l_2 + 0$ a jako součet $0 + 0 + u$. □

Tvrzení 10.3.3. *Buďte $U_1, \dots, U_n \subseteq V$ podprostory takové, že $V = U_1 + \dots + U_n$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $V = U_1 \dot{+} U_2 \dot{+} \cdots \dot{+} U_n$;

(ii) $U_1 \cap U_2 = 0$, $(U_1 + U_2) \cap U_3 = 0$, $\dots$, $(U_1 + \dots + U_{n-1}) \cap U_n = 0$.

Je-li navíc prostor V konečněrozměrný, pak je s nimi ekvivalentní i podmínka

(iii) $\dim V = \dim U_1 + \dots + \dim U_n$.

Důkaz. Cvičení. □

Jsou-li $U_1, \dots, U_n$ podprostory nějakého vektorového prostoru V, pak mohou existovat dva různé přímé součty, $U_1 \dot{+} \cdots \dot{+} U_n$ a $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$. První z nich je podprostor V, kdežto druhý není. Nicméně, tyto přímé součty jsou izomorfní, což plyne z tvrzení uvedeného později v kapitole o lineárních zobrazeních.

Příklad. Buďte $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = \{(x, 0, 0) | \, x \in \mathbb{R}\}$ a $U_2 = \{(0, y, 0) | \, y \in \mathbb{R}\}$. Potom

$U_1 \dot{+} U_2 = \{(x, y, 0) | \, x, y \in \mathbb{R}\}$ je podprostor $\mathbb{R}^3$,

$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ je báze $U_1 \dot{+} U_2$ a

$\dim(U_1 \dot{+} U_2) = 2$.

$U_1 \oplus U_2 = \{((x, 0, 0), (0, y, 0)) | \, x, y \in \mathbb{R}\}$ není podprostor $\mathbb{R}^3$,

$\{((1, 0, 0), (0, 0, 0)), ((0, 0, 0), (0, 1, 0))\}$ je báze $U_1 \oplus U_2$ a

$\dim(U_1 \oplus U_2) = 2$. □

10.4. Popis podprostorů P^n homogenními soustavami

Každý podprostor prostoru P^n je množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic.

Tvrzení 10.4.1. *Každý podprostor $U \subseteq P^n$ je množina všech řešení homogenní soustavy $Ax = 0$, kde A je vhodná matice typu $m \times n$, přičemž $m = n - \dim U$.*

Důkaz. Podprostor U je konečněrozměrný, nechť $U = [\![v_1, \dots, v_k]\!]$. Je třeba najít matici A takovou, že U je množina všech řešení soustavy $Ax = 0$. Matice A tedy musí mít n sloupků a má platit

$$Av_i = 0 \quad \text{pro každé } i = 1, \dots, k,$$

což je totéž jako

$$AV = 0,$$

kde V je matice s k sloupky $v_1, \dots, v_k$. Transponujeme-li na obou stranách, obdržíme ekvivalentní rovnici

$$V^\mathsf{T} A^\mathsf{T} = 0.$$

Řádky hledané matice A tedy můžeme získat jako nějaký fundamentální systém řešení homogenní soustavy

$$V^\mathsf{T} a = 0, \quad \text{kde } a \text{ je } n\text{-tice (sloupek) neznámých.}$$

Označme Ξ_A, resp. Ξ_{V^T} prostor všech řešení homogenní soustavy $Ax = 0$, resp. $V^\mathsf{T} a = 0$. Máme $v_i \in \Xi_A$, odkud $[\![v_1, \dots, v_k]\!] \subseteq \Xi_A$. Přitom platí $\dim \Xi_A = n - \operatorname{rank} A = n - \dim \Xi_{V^\mathsf{T}} = n - (n - \operatorname{rank} V^\mathsf{T}) = \operatorname{rank} V^\mathsf{T} = \dim[\![v_1, \dots, v_k]\!]$. Tudíž, $\Xi_A = U$. □

Příklad. Buď $U = [\![(1, 0, 2)]\!] \subset \mathbb{R}^3$. Najdeme soustavu rovnic, jejíž množina všech řešení je právě U.

Podle důkazu předchozího tvrzení je třeba vyřešit soustavu $V^\mathsf{T} a = 0$, tedy rovnici

$$1 \cdot a^1 + 0 \cdot a^2 + 2 \cdot a^3 = 0.$$

Neznámá a^1 je hlavní, neznámé a^2, a^3 jsou parametry. Obecné řešení tedy je

$$a^1 = -2 \cdot t^2, \quad a^2 = t^1, \quad a^3 = t^2$$

a vhodnými volbami parametrů dostaneme fundamentální systém řešení

$$(0, 1, 0), \quad (-2, 0, 1).$$

Tudíž, matice hledané homogenní soustavy je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Není obtížné najít součet podprostorů zadaných generátory, resp. průnik podprostorů zadaných homogenními soustavami rovnic:

Cvičení. $[\![u_1, \dots, v_i]\!] + [\![u_{i+1}, \dots, u_n]\!] = [\![u_1, \dots, v_i, u_{i+1}, \dots, u_n]\!]$. □

Cvičení. $\{x \mid A'x = 0\} \cap \{x \mid A''x = 0\} = \{x \mid Ax = 0\}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix}.$$

□

Protože zadání podprostoru generátory umíme převádět na zadání homogenní soustavou rovnic a naopak, umíme najít i součet podprostorů zadaných homogenními soustavami rovnic, resp. průnik podprostorů zadaných generátory.

11. LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

11.1. Definice, příklady

Definice 11.1.1. Buďte U, V vektorové prostory nad polem P. Zobrazení $f\colon U \to V$ je *lineární*, přesněji *lineární nad polem P*, nebo *homomorfismus vektorových prostorů*, jestliže pro každé vektory $u, u_1, u_2 \in U$ a každý skalár $p \in P$ platí

(i) $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$ (aditivita)
(ii) $f(pu) = pf(u)$. (homogenita)

Příklad. (1) Identické zobrazení $\mathrm{id}\colon U \to U$, $\mathrm{id}(a) = a$, je lineární.

(2) Nulové zobrazení $0\colon U \to U$, $0(a) = 0$, je lineární.

(3) Násobení skalárem $c \in P$: Zobrazení $f_c\colon U \to U$, $f_c(a) = ca$, je lineární. Nazývá se *homotetie*. Všimněte si, že předchozí dva příklady jsou speciální případy pro $c = 1$, resp. $c = 0$.

(4) Zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je lineární nad $\mathbb{R}$ právě tehdy, když existuje skalár $c \in \mathbb{R}$ takový, že $f(a) = ca$. Dokažte. Návod: Položte $c = f(1)$.

(5) Zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (3x + 2y + z, x - y)$, je lineární. Ověřte.

(6) Zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y) \mapsto (x + y, x, x - y, y)$, je lineární. Ověřte.

(7) Buď A matice typu $m \times n$ nad polem P. Nechť $f_A\colon P^n \to P^m$ je zobrazení takové, že $f_A(x) = Ax$ (přesněji tedy $f_A\colon P^{n\times 1} \to P^{m\times 1}$). Čili, obraz n-tice $x = (x^1, \dots, x^n)$ je lineární kombinace sloupků matice A s koeficienty $x^1, \dots, x^n$,

$$f_A(x) = x^1 A^\circ_1 + x^2 A^\circ_2 + \cdots + x^n A^\circ_n.$$

Potom f_A je lineární zobrazení.

(8) Zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^*$, kde z^* je číslo komplexně sdružené k číslu $z \in \mathbb{C}$, je lineární zobrazení vektorových prostorů nad $\mathbb{R}$. Toto zobrazení není lineární zobrazení nad $\mathbb{C}$. Ověřte.

(9) Zobrazení $\mathrm{re}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \mathrm{re}\, z = \frac{1}{2}(z + z^*)$ (reálná část čísla z) je lineární zobrazení vektorových prostorů nad $\mathbb{R}$.

(10) Je-li $U \subseteq V$ podprostor, pak vložení $\iota_U\colon U \to V$, $\iota_U(u) = u$, je lineární zobrazení.

(11) Otáčení. Při otáčení Eukleidovské roviny kolem pevného bodu o úhel α se všechny vektory otáčejí o týž úhel α, nezávisle na jejich umístění. Vzniká zobrazení $\phi_\alpha\colon E^2 \to E^2$.

Otáčení převádí součet vektorů na součet vektorů a podobně c-násobek vektoru na c-násobek vektoru. Například aditivita se velmi názorně ověří poukazem na to, že otáčením kolem vrcholu se rovnoběžník převádí v rovnoběžník a délka jeho stran a úhlopříček se přitom nemění.

Podobně otáčení kolem pevné osy v trojrozměrném Eukleidovském prostoru představuje lineární zobrazení vektorů $E^3 \to E^3$.

(12) Rotace $E^3 \to E^3$.

(13) Rovnoběžné promítání. Promítání Eukleidovského prostoru E^3 do 2-rozměrného podprostoru (průmětny) R ve zvoleném směru L je zobrazení $E^3 \to R$. Směrem se rozumí libovolný 1-rozměrný podprostor L takový, že $E^3 = L \dotplus R$. Průmět do roviny R je sčítanec x_R v (jednoznačném) vyjádření $x = x_L + x_R$, kde $x_L \in L$ a $x_R \in R$.

Promítání $p\colon E^3 \to R$ je lineární zobrazení. Aditivita se projevuje v tom, že průmětem rovnoběžníka je rovnoběžník.

(14) Projekce na přímku L procházející počátkem $E^2 \to L$.

(15) Osová souměrnost podle přímky procházející počátkem, $E^2 \to E^2$ i $E^3 \to E^3$.

(16) Zobrazení $U \to P^{\dim U}$ přiřazující vektorům jejich souřadnice vzhledem ke zvolené bázi, viz Tvrzení 9.4.4.

(17) Zobrazení $P^{n\times n} \to P$, $A \mapsto \operatorname{tr} A$, přiřazující matici A typu $n \times n$ nad polem P její stopu $\operatorname{tr} A = \sum_i A_i^i$ (součet prvků na diagonále).

(18) Zobrazení $P[x] \to P[x]$, kde $P[x]$ je prostor polynomů, přiřazující polynomu jeho derivaci. Derivace může být například i zobrazení $P_n[x] \to P_{n-1}[x]$, nebo zobrazení z prostoru diferencovatelných funkcí do prostoru všech funkcí.

(19) Zobrazení z prostoru všech integrovatelných funkcí na uzavřeném intervalu do $\mathbb{R}$ přiřazující funkci její určitý integrál. □

Cvičení. Ukažte, že lineární zobrazení $U \to V$ je homomorfismus abelovských grup $(U, +, 0, -) \to (V, +, 0, -)$. Speciálně, $f(0) = 0$, $f(-a) = -f(a)$. □

Cvičení. Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení. Matematickou indukcí ukažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $u_1, \dots, u_n \in U$ a skaláry $p_1, \dots, p_n$ platí

$$f(p_1u_1 + \cdots + p_nu_n) = p_1f(u_1) + \cdots + p_nf(u_n),$$

tedy obraz lineární kombinace je lineární kombinace obrazů. □

Lineární zobrazení je jednoznačně určeno obrazy vektorů libovolné báze:

Tvrzení 11.1.1. *Buďte U, V vektorové prostory nad polem P, $(u_1, \dots, u_n)$ báze U. Pak pro každou n-tici $v_1, \dots, v_n \in V$ existuje právě jedno lineární zobrazení $f\colon U \to V$ takové, že $f(u_1) = v_1, \dots, f(u_n) = v_n$.*

Důkaz. Buďte $v_1, \dots, v_n \in V$. Pro $u \in U$ existují $x_1, \dots, x_n \in P$ tak, že $u = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n$. Položme $f(u) = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$. Cvičení: ověřte, že $f(u_i) = v_i$, f je lineární a je-li f' zobrazení s těmito vlastnostmi, potom $f' = f$. □

Tvrzení 11.1.2. *Buďte $f\colon U \to V$ a $g\colon V \to W$ lineární zobrazení. Pak $g \circ f\colon U \to W$ je lineární zobrazení.*

Důkaz. Buďte U, V, W vektorové prostory nad polem P. Pro libovolná $u_1, u_2 \in U$ máme

$$\begin{aligned}(g \circ f)(u_1 + u_2) &= g(f(u_1 + u_2)) = \\ &= g(f(u_1) + f(u_2)) = \\ &= g(f(u_1)) + g(f(u_2)) = \\ &= (g \circ f)(u_1) + (g \circ f)(u_2).\end{aligned}$$

Pro libovolné $u \in U$ a $p \in P$ máme

$$\begin{aligned}(g \circ f)(pu) &= g(f(pu)) = \\ &= g(pf(u)) = \\ &= pg(f(u)) = \\ &= p(g \circ f)(u).\end{aligned}$$

□

11.2. Jádro a obraz

Definice 11.2.1. Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení. Označme

$$\operatorname{Ker} f = \{u \in U \mid f(u) = 0\},$$

$$\operatorname{Im} f = f(U) = \{f(u) \mid u \in U\}.$$

$\operatorname{Ker} f$ je *jádro* a $\operatorname{Im} f$ je *obraz* lineárního zobrazení f.

Tvrzení 11.2.1. *Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení. Pak*

(1) $\operatorname{Ker} f$ *je podprostor* U,
(2) $\operatorname{Im} f$ *je podprostor* V.

Důkaz. (1) (i) $0 \in \operatorname{Ker} f$, protože $f(0) = 0$, (ii) Nechť $a, b \in \operatorname{Ker} f$. Pak $a + b \in \operatorname{Ker} f$, protože $f(a+b) = f(a)+f(b) = 0+0 = 0$. (iii) Nechť $a \in \operatorname{Ker} f$, $r \in P$. Pak $ra \in \operatorname{Ker} f$, protože $f(ra) = rf(a) = r \cdot 0 = 0$.

(2) (i) $0 \in \operatorname{Im} f$, protože $f(0) = 0$, (ii) Nechť $a, b \in \operatorname{Im} f$, tedy existují $c, d \in U$ takové, že $f(c) = a$ a $f(d) = b$. Pak $a + b \in \operatorname{Im} f$, protože $f(c + d) = f(c) + f(d) = a + b$. (iii) Nechť $a \in \operatorname{Im} f$, $r \in P$, tedy existuje $b \in U$ takové, že $f(b) = a$. Pak $ra \in \operatorname{Im} f$, protože $f(rb) = rf(b) = ra$. □

Cvičení. (1) Pro lineární zobrazení re z příkladu (9) platí:

$$\operatorname{Im} \mathrm{re} = \mathbb{R}, \qquad \operatorname{Ker} \mathrm{re} = \mathbb{R}\mathrm{i} = \{r\mathrm{i} \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

(2) Při rovnoběžném promítání $p \colon E^3 \to E^2$ je podprostor $\operatorname{Ker} p$ totožný se směrem promítání, kdežto $\operatorname{Im} p = E^2$.

(3) Při otáčení $\phi_\alpha \colon E^2 \to E^2$ o úhel $\alpha \neq 2k\pi$ je $\operatorname{Im} \phi_\alpha = E^2$, zatímco $\operatorname{Ker} \phi_\alpha$ je nulový podprostor. □

Tvrzení 11.2.2. *Buď* $f \colon U \to V$ *lineární zobrazení. Pak*

(1) f *je injektivní právě tehdy, když* $\operatorname{Ker} f = 0$,
(2) f *je surjektivní právě tehdy, když* $\operatorname{Im} f = V$.

Důkaz. (1) Buď f injektivní, buď u libovolný prvek z $\operatorname{Ker} f$. Pak $f(u) = 0$, ale současně $f(0) = 0$, načež z injektivity $u = 0$.

Naopak, nechť $\operatorname{Ker} f = 0$ a nechť $f(a) = f(b)$. Pak $f(a - b) = f(a) - f(b) = 0$, a tedy $a - b \in \operatorname{Ker} f$, načež $a - b = 0$, čili $a = b$.

(2) Zřejmé. □