1. přednáška, 19. 2. 2024

10. Vektorové podprostory

10.1. Definice, příklady, základní vlastnosti

Definice 10.1.1. Buďte V vektorový prostor nad polem P a $U \subseteq V$. U je *vektorový podprostor* prostoru V, jestliže

(i) $0 \in U$;
(ii) $u_1 + u_2 \in U$ pro každé $u_1, u_2 \in U$ (uzavřenost na sčítání);
(iii) $pu \in U$ pro každé $u \in U$ a každé $p \in P$ (uzavřenost na násobení skalárem).

Podle (iii) pro každý vektor $u \in U$ máme $-u = (-1) \cdot u \in U$, čili s každým vektorem leží v U i vektor k němu opačný. To spolu s (i) a (ii) znamená, že podprostor je podgrupa abelovské grupy $(V, +, 0, -)$.

Axiomy vektorového prostoru jsou splněny na V a tím spíše na U (cvičení). Tudíž, podobně jako u ostatních algebraických podstruktur, podprostor je sám též vektorovým prostorem.

Příklad. (1) V každém vektorovém prostoru je nulový podprostor obsahující jen nulový vektor.
(2) Každý prostor je sám svým podprostorem.
(3) $\mathbb{R}$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad polem $\mathbb{R}$ (ověřte).
(4) $\{(a, 0) |\ a \in \mathbb{R}\}$ je podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ nad polem $\mathbb{R}$ (ověřte). □

Tvrzení 10.1.1. *Množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic o n neznámých s maticí A nad polem P je podprostor prostoru P^n s dimenzí $n - \operatorname{rank} A$.*

Důkaz. Tvrzení vyplývá z kapitoly 3.5. Každá homogenní soustava rovnic má nulové řešení, součet řešení je řešení a skalární násobek řešení je řešení. Množina všech řešení tedy má vlastnosti požadované v definici vektorového podprostoru. Navíc, fundamentální systém řešení má $n - \operatorname{rank} A$ prvků a tvoří bázi prostoru všech řešení. □

Mnoho dalších příkladů můžeme získat jako lineární obaly.

Tvrzení 10.1.2. *Buď W podmnožina vektorového prostoru V nad polem P. Pak platí:*

(1) $[\![W]\!]$ je podprostor prostoru V.
(2) Je-li U podprostor V obsahující W, pak $[\![W]\!] \subseteq U$.

Důkaz. (1) Ukážeme, že množina $[\![W]\!]$ splňuje podmínky (i)–(iii) z definice vektorového podprostoru. Podmínka (i): Je-li $W = \emptyset$, potom $[\![W]\!] = \{0\}$, takže $0 \in [\![W]\!]$. Je-li $W \neq \emptyset$, potom pro libovolný vektor $v \in W$ je $0 = 0v \in [\![W]\!]$. Podmínka (ii): Jsou-li $u, v \in [\![W]\!]$, potom $u = x_1u_1 + \cdots + x_mu_m$ a $v = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n$ pro nějaké $x_i, y_j \in P$, $u_i, v_j \in W$ a $m, n \in \mathbb{N}$. Tedy $u + v = x_1u_1 + \cdots + x_mu_m + y_1v_1 + \cdots + y_nv_n \in [\![W]\!]$. Podmínka (iii): Cvičení.

(2) Buď $w \in [\![W]\!]$, tedy $w = x_1w_1 + \cdots + x_nw_n$ pro nějaké $x_i \in P$, $w_i \in W$ a $n \in \mathbb{N}$. Jelikož $W \subseteq U$, všechny vektory w_i jsou prvky U, a jelikož U je vektorový podprostor, tedy uzavřený na násobení skalárem a sčítání vektorů, $w \in U$. □

Tudíž, $[\![W]\!]$ je nejmenší podprostor prostoru V obsahující množinu W.

Tvrzení 10.1.3. *Libovolný podprostor konečněrozměrného vektorového prostoru je konečněrozměrný.*

Důkaz. Buď V konečněrozměrný prostor, $\dim V = n$, buď $U \subseteq V$ podprostor. Zkonstruujeme bázi postupem, který jsme použili při doplňování lineárně nezávislé množiny vektorů do báze v důkazu druhého Důsledku Tvrzení 9.3.3.

0-tý krok: Je-li U nulový prostor, jsme hotovi (U je 0-rozměrný).

1-ní krok: Když $U \neq \{0\}$, pak existuje vektor $u_1 \in U \setminus \{0\}$. Je-li $U = [\![u_1]\!]$, pak jsme hotovi (U je 1-rozměrný).

k-tý krok: Když $U \neq [\![u_1, \dots, u_{k-1}]\!]$, pak existuje vektor $u_k \in U \setminus [\![u_1, \dots, u_{k-1}]\!]$. Je-li $U = [\![u_1, \dots, u_k]\!]$, pak jsme hotovi ($U$ je k-rozměrný).

Množina $\{u_1, \dots, u_k\}$ je lineárně nezávislá, protože žádný z jejích vektorů není lineární kombinací předchozích (podle konstrukce $u_i \notin [\![u_1, \dots, u_{i-1}]\!]$). Podle Tvrzení 9.2.5 lineárně nezávislá množina nemá více prvků než množina generátorů, takže pro nějaké $m \leq n$ dostaneme $U = [\![u_1, \dots, u_m]\!]$. □

Důsledek. *Vektorový prostor, který má nekonečněrozměrný podprostor, je nekonečněrozměrný.*

Příklad. Prostor $C^r\mathbb{R}$ všech funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spojitých se všemi derivacemi až do řádu r včetně, je nekonečněrozměrný, protože obsahuje podprostor polynomů $\mathbb{R}[x]$, který je nekonečněrozměrný. □

Tvrzení 10.1.4. *Buď V konečněrozměrný vektorový prostor, buď U jeho podprostor. Jestliže* $\dim U = \dim V$, *pak* $U = V$.

Důkaz. Buď $(u_1, \dots, u_n)$ libovolná báze U. Předpokládejme, že $U \neq V$, tedy že existuje vektor $v \in V \setminus U$. V prostoru V tak máme $(n+1)$-prvkovou lineárně nezávislou množinu vektorů $\{u_1, \dots, u_n, v\}$ (žádný z nich není lineární kombinací předchozích: vektory u_i protože jsou bázové, vektor v proto, že jinak by ležel v U). Tedy $\dim V \geq n + 1 > n = \dim U$. □

Příklad. (1) Podprostory $\mathbb{R}$.

(2) Podprostory $\mathbb{R}^2$.

(3) Podprostory $\mathbb{R}^3$. □

10.2. Průnik a součet podprostorů

Tvrzení 10.2.1. *Buďte U_1, U_2 podprostory V. Pak $U_1 \cap U_2$ je podprostor V.*

Důkaz. Ukážeme, že množina $U_1 \cap U_2$ splňuje podmínky (i)–(iii) z definice vektorového podprostoru. Podmínka (i): $0 \in U_1 \cap U_2$, protože $0 \in U_1$ a $0 \in U_2$. Podmínka (ii): Nechť $u_1, u_2 \in U_1 \cap U_2$. Pak $u_1, u_2 \in U_1$, takže $u_1 + u_2 \in U_1$, a zároveň $u_1, u_2 \in U_2$, takže $u_1 + u_2 \in U_2$. Tudíž, $u_1 + u_2 \in U_1 \cap U_2$. Podmínka (iii): Cvičení. □

Cvičení. Průnik libovolného systému podprostorů je podprostor. □

Definice 10.2.1. Buďte $U_1, \dots, U_n$ podprostory V. Označme

$$U_1 + \dots + U_n = \{u_1 + \dots + u_n |\ u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n\}.$$

Množina $U_1 + \dots + U_n$ je *součet* podprostorů $U_1, \dots, U_n$.

Prvky množiny $U_1 + \dots + U_n$ jsou všechny vektory $v \in V$, pro něž existuje vyjádření $v = u_1 + \dots + u_n$, kde $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$.

Tvrzení 10.2.2. *Buďte $U_1, \dots, U_n$ podprostory V. Pak $U_1 + \dots + U_n$ je podprostor V.*

Důkaz. Ukážeme, že množina $U_1 + \dots + U_n$ splňuje podmínky (i)–(iii) z definice vektorového podprostoru. Podmínka (i): $0 = 0 + \dots + 0 \in U_1 + \dots + U_n$, kde $0 \in U_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Podmínka (ii): Nechť $u, v \in U_1 + \dots + U_n$. Pak $u = u_1 + \dots + u_n$ a $v = v_1 + \dots + v_n$, kde $u_i, v_i \in U_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$, načež $u + v = u_1 + \dots + u_n + v_1 + \dots + v_n = (u_1 + v_1) + \dots + (u_n + v_n) \in U_1 + \dots + U_n$. Podmínka (iii): Cvičení. □

Cvičení. Dokažte, že (1) $U_1, U_2 \subseteq U_1 + U_2$.

(2) Je-li U podprostor ve V takový, že $U_1 \subseteq U$ a $U_2 \subseteq U$, pak $U_1 + U_2 \subseteq U$.

Návod: (1) Je-li $u_1 \in U_1$ libovolný prvek, pak $u_1 = u_1 + 0 \in U_1 + U_2$.

(2) Buď $u_1 + u_2$ obecný vektor z $U_1 + U_2$, $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$. Protože $U_1, U_2 \subseteq U$, máme $u_1, u_2 \in U$, načež $u_1 + u_2 \in U$. □

Množina $S(V)$ všech podprostorů vektorového prostoru V je uspořádána inkluzí $\subseteq$. Z dokázaných tvrzení o průnicích a součtech podprostorů plyne, že množina $S(V)$ je svazově uspořádána, přičemž infimem je průnik a supremem je součet podprostorů. Tudíž, $(S(V), \cap, +)$ je svaz.

Tvrzení 10.2.3. *Buďte U_1, U_2 konečněrozměrné podprostory jednoho vektorového prostoru. Pak*

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2).$$

Důkaz. Označme $\dim U_1 = n_1$, $\dim U_2 = n_2$ a $\dim(U_1 \cap U_2) = m$. Buď $\{u_1, \dots, u_m\}$ báze v $U_1 \cap U_2$. To je lineárně nezávislá množina vektorů v U_1 i v U_2 a můžeme ji tedy v obou prostorech doplnit do báze vektory $u^1_1, \dots, u^1_{n_1-m}$ resp. $u^2_1, \dots, u^2_{n_2-m}$. Ukažme, že $\{u_1, \dots, u_m, u^1_1, \dots, u^1_{n_1-m}, u^2_1, \dots, u^2_{n_2-m}\}$ je báze v $U_1 + U_2$.

Nejdříve ukážeme, že množina $\{u_1, \dots, u_m, u^1_1, \dots, u^1_{n_1-m}, u^2_1, \dots, u^2_{n_2-m}\}$ je lineárně nezávislá. Nechť

$$c_1u_1 + \dots + c_mu_m + c^1_1u^1_1 + \dots + c^1_{n_1-m}u^1_{n_1-m} + c^2_1u^2_1 + \dots + c^2_{n_2-m}u^2_{n_2-m} = 0$$

pro nějaké skaláry $c_1, \dots, c_m, c^1_1, \dots, c^1_{n_1-m}, c^2_1, \dots, c^2_{n_2-m} \in P$. Pak

$$c_1u_1 + \dots + c_mu_m + c^1_1u^1_1 + \dots + c^1_{n_1-m}u^1_{n_1-m} = -c^2_1u^2_1 - \dots - c^2_{n_2-m}u^2_{n_2-m},$$

kde na levé straně je prvek z U_1 a na pravé prvek z U_2, ale protože jsou si rovny, leží v $U_1 \cap U_2$, a lze je jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinace vektorů $u_1, \dots, u_m$. Vyjádřeme tak vektor na pravé straně: existují skaláry $x_1, \dots, x_m \in P$ takové, že

$$x_1u_1 + \dots + x_mu_m = -c^2_1u^2_1 - \dots - c^2_{n_2-m}u^2_{n_2-m}.$$

Z nezávislosti množiny $\{u_1, \dots, u_m, u^2_1, \dots, u^2_{n_2-m}\}$ (je to báze v U_2) plyne, že

$$x_1 = \dots = x_m = c^2_1 = \dots = c^2_{n_2-m} = 0.$$

Odtud

$$c_1u_1 + \dots + c_mu_m + c^1_1u^1_1 + \dots + c^1_{n_1-m}u^1_{n_1-m} = 0,$$

a z nezávislosti množiny $\{u_1, \dots, u_m, u_1^1, \dots, u_{n_1-m}^1\}$ (je to báze v U_1) plyne, že

$$c_1 = \dots = c_m = c_1^1 = \dots = c_{n_1-m}^1 = 0.$$

Všechny koeficienty $c_1, \dots, c_m, c_1^1, \dots, c_{n_1-m}^1, c_1^2, \dots, c_{n_2-m}^2$ jsou tedy nulové, takže množina $\{u_1, \dots, u_m, u_1^1, \dots, u_{n_1-m}^1, u_1^2, \dots, u_{n_2-m}^2\}$ je lineárně nezávislá.

Snadno se dokáže, že vektory $u_1, \dots, u_m, u_1^1, \dots, u_{n_1-m}^1, u_1^2, \dots, u_{n_2-m}^2$ generují $U_1 + U_2$ (cvičení).

Máme tedy bázi v $U_1 + U_2$ o $m + (n_1 - m) + (n_2 - m) = n_1 + n_2 - m$ vektorech, takže $\dim(U_1 + U_2) = n_1 + n_2 - m = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$. □

Příklad. V prostoru E^3 buď $U \subset E^3$ nějaká rovina procházející počátkem a $L \subset E^3$ libovolná přímka procházející počátkem a neležící v U. Pak U je podprostor a podobně L je podprostor, přičemž evidentně $U \cap L = \{0\}$. Proto $\dim(U + L) = \dim U + \dim L - \dim(U \cap L) = 2 + 1 - 0 = 3 = \dim E^3$. Tudíž, $E^3 = U + L$ a každý vektor $v \in E^3$ je součtem $v = u + l$, kde $u \in U$ a $l \in L$. Jak najdeme vektory u, l, je-li dán vektor v? □

Cvičení. Buďte U_1, U_2 podprostory ve vektorovém prostoru V, nechť $\dim U_1 + \dim U_2 > \dim V$. Ukažte, že existuje nenulový vektor $u \in U_1 \cap U_2$. □

Cvičení. Ukažte, že $[\![u_1, \dots, u_n]\!] + [\![v_1, \dots, v_m]\!] = [\![u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m]\!]$. □