8. Homomorfismy

8.1. Homomorfismy a izomorfismy grup

8.1.1. Homomorfismy grup

Definice 8.1.1. Buďte $(X,\ *, e_X, ^{-1})$, $(Y,\ \diamond, e_Y, ^{-1})$ grupy. Zobrazení $f\colon X \to Y$ je *homomorfismus grup*, jestliže

(i) pro každé $x_1, x_2 \in X$ platí $f(x_1 * x_2) = f(x_1) \diamond f(x_2)$,
(ii) $f(e_X) = e_Y$,
(iii) pro každé $x \in X$ platí $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

Značí se $f\colon (X,\ *, e_X, ^{-1}) \to (Y,\ \diamond, e_Y, ^{-1})$.

Příklad. (1) $f_2\colon (\mathbb{Z},\ +, 0, -) \to (\mathbb{Z},\ +, 0, -)$, $n \mapsto 2n$, je homomorfismus grup.
(2) Buď X grupa, $\tilde{X}$ faktorová grupa. Potom zobrazení $X \to \tilde{X}$, $x \mapsto [x]$ (faktorová projekce) je homomorfismus grup.
(3) Buďte $X = \{0, 1, 2, 3\}$ a $Y = \{0, 1\}$ s binárními operacemi $+$ takovými, že

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

a

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Potom množiny X a Y s těmito operacemi jsou grupy. Zobrazení $X \to Y$, $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 0$, $3 \mapsto 1$, je homomorfismus těchto grup. □

Tvrzení 8.1.1. *Buďte $(X,\ *, e_X, ^{-1}), (Y,\ \diamond, e_Y, ^{-1})$ grupy. Buď $f\colon X \to Y$ zobrazení takové, že pro každé $x_1, x_2 \in X$ platí $f(x_1 * x_2) = f(x_1) \diamond f(x_2)$. Pak f je homomorfismus grup $(X,\ *, e_X, ^{-1}) \to (Y,\ \diamond, e_Y, ^{-1})$.*

Důkaz. Podmínka (i) z definice homomorfismu grup je podle předpokladu splněna.

Ukažme, že $f(e_X) = e_Y$.

$$\begin{aligned} f(e_X) &= f(e_X) \diamond e_Y = \\ &= f(e_X) \diamond f(e_X) \diamond (f(e_X))^{-1} = \\ &= f(e_X * e_X) \diamond (f(e_X))^{-1} = \\ &= f(e_X) \diamond (f(e_X))^{-1} = \\ &= e_Y. \end{aligned}$$

Ukažme, že $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$ pro každé $x \in X$.

$$f(x^{-1}) \diamond f(x) = f(x^{-1} * x) = f(e_X) = e_Y,$$
$$f(x) \diamond f(x^{-1}) = f(x * x^{-1}) = f(e_X) = e_Y.$$

Takže $f(x^{-1})$ je inverze k $f(x)$. □

Cvičení. Buď $f\colon X \to Y$ homomorfismus grup. Označme

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

Pak $\operatorname{Im} f$ je podgrupa v Y. □

Tvrzení 8.1.2. *Buďte $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$ homomorfismy grup. Pak jejich složení $g \circ f\colon X \to Z$ je homomorfismus grup.*

Důkaz. Buďte $(X, *, e_X, {}^{-1}), (Y, \diamond, e_Y, {}^{-1}), (Z, \cdot, e_Z, {}^{-1})$ grupy. Pro každé $x_1, x_2 \in X$ platí

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x_1 * x_2) &= g(f(x_1 * x_2)) = \\ &= g(f(x_1) \diamond f(x_2)) = \\ &= g(f(x_1)) \cdot g(f(x_2)) = \\ &= (g \circ f)(x_1) \cdot (g \circ f)(x_2).\end{aligned}$$

Zbytek vyplývá z předchozího tvrzení. □

8.1.2. Izomorfismy grup

Definice 8.1.2. *Izomorfismus grup* je homomorfismus grup, který je bijektivní.

Tvrzení 8.1.3. *Buď $f\colon X \to Y$ izomorfismus grup. Pak $f^{-1}\colon Y \to X$ je izomorfismus grup.*

Důkaz. Buďte $(X, *, e_X, {}^{-1}), (Y, \diamond, e_Y, {}^{-1})$ grupy. Inverzní zobrazení je bijektivní. Pro libovolné $y_1, y_2 \in Y$ označme $x_1 = f^{-1}(y_1)$ a $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Takže $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Potom

$$\begin{aligned}f^{-1}(y_1 \diamond y_2) &= f^{-1}(f(x_1) \diamond f(x_2)) = f^{-1}(f(x_1 * x_2)) = x_1 * x_2 = \\ &= f^{-1}(y_1) * f^{-1}(y_2).\end{aligned}$$

Zbytek vyplývá z Tvrzení 8.1.1. □

Příklad. (1) Každá identita je izomorfismus.

(2) Označme $\mathbb{R}_+$ množinu všech kladných reálných čísel. Pak $(\mathbb{R}_+, \cdot, 1, {}^{-1})$ je grupa (cvičení). Zobrazení $\exp\colon (\mathbb{R}, +, 0, -) \to (\mathbb{R}_+, \cdot, 1, {}^{-1})$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ je homomorfismus grup, protože pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí $\exp(x+y) = \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y = (\exp x) \cdot (\exp y)$. Tento homomorfismus je bijektivní, tedy i izomorfismus.

Inverzní izomorfismus je logaritmus

$$\ln\colon (\mathbb{R}_+, \cdot, 1, {}^{-1}) \to (\mathbb{R}, +, 0, -).$$ □

Definice 8.1.3. Dvě grupy X, Y jsou *izomorfní*, jestliže existuje izomorfismus $X \to Y$. Zapisujeme $X \cong Y$.

Tvrzení 8.1.4. *Pro libovolné grupy X, Y, Z platí*

(i) $X \cong X$ (reflexivita),
(ii) jestliže $X \cong Y$, pak $Y \cong X$ (symetrie),
(iii) jestliže $X \cong Y$ a $Y \cong Z$, pak $X \cong Z$ (tranzitivita).

Důkaz. Cvičení. □

Příklad. $(\mathbb{R}, +, 0, -) \cong (\mathbb{R}_+, \cdot, 1, {}^{-1})$. Pro libovolné $a \in \mathbb{R}_+, a \neq 1$, zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto a^x$ je izomorfismus $(\mathbb{R}, +, 0, -) \to (\mathbb{R}_+, \cdot, 1, {}^{-1})$. Ověřte. □

Cvičení. Buď $h\colon X \to Y$ homomorfismus grup.

(1) Ukažte, že relace $\sim$ zadaná předpisem

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow h(x_1) = h(x_2)$$

je kongruence na grupě X.

(2) Ukažte, že faktorová grupa $\tilde{X}$ podle kongruence $\sim$ je izomorfní podgrupě $\operatorname{Im} h$. Návod: $\tilde{X} \to \operatorname{Im} h$, $[x] \mapsto h(x)$. □

8.2. Homomorfismy a izomorfismy polí

Definice 8.2.1. Buďte P, Q pole. Zobrazení $f\colon P \to Q$ je *homomorfismus polí*, jestliže

(i) pro každé $p_1, p_2 \in P$ platí $f(p_1 + p_2) = f(p_1) + f(p_2)$,
(ii) $f(0) = 0$,
(iii) pro každé $p \in P$ platí $f(-p) = -f(p)$,
(iv) pro každé $p_1, p_2 \in P$ platí $f(p_1 \cdot p_2) = f(p_1) \cdot f(p_2)$,
(v) $f(1) = 1$,
(vi) pro každé $p \in P$, $p \neq 0$, platí $f(p^{-1}) = (f(p))^{-1}$.

Definice 8.2.2. Je-li homomorfismus polí navíc bijektivní, je to *izomorfismus polí*. Pole, mezi nimiž existuje izomorfismus, jsou *izomorfní*.

Příklad. Dvouprvkové pole $\{0, 1\}$ je izomorfní s polem $\mathbb{Z}_2$. Izomorfismem je zobrazení $0 \mapsto [0]_2, 1 \mapsto [1]_2$. □

8.3. Izotonní zobrazení, homomorfismy a izomorfismy svazů

8.3.1. Izotonní zobrazení a izomorfismy uspořádaných množin

Definice 8.3.1. Buďte $(X, \leq)$, $(Y, \leq)$ uspořádané množiny. Zobrazení $f\colon X \to Y$ je *izotonní*, jestliže platí implikace

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Je-li zobrazení f bijektivní a f i f^{-1} jsou izotonní, pak f je *izomorfismus uspořádaných množin* a uspořádané množiny $(X, \leq)$, $(Y, \leq)$ jsou *izomorfní*.

Příklad. Identické zobrazení $\mathrm{id}\colon (\mathbb{N}, |) \to (\mathbb{N}, \leq)$ je izotonní. Skutečně, jestliže $a \mid b$, pak $b = na$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, ale $n \geq 1$, a proto $b = na \geq a$.

Inverzní zobrazení $\mathrm{id}\colon (\mathbb{N}, \leq) \to (\mathbb{N}, |)$ není izotonní, protože neplatí implikace $x \leq y \Rightarrow x \mid y$ (například $2 \leq 3$, ale $2 \nmid 3$). □

Příklad. Buďte $X = Y = \{0, 1\}$ s uspořádáními a zobrazením f podle obrázku:

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[rr] & & 1 \arrow[dd, dash] & \\ X & & f & & Y \\ & 0 \arrow[rr] & & 0 & \end{tikzcd}$$

Tedy $f\colon X \to Y$ je identické zobrazení. Pak f je izotonní bijekce, jejíž inverze f^{-1} není izotonní. □

Cvičení. Složení izotonních zobrazení je izotonní zobrazení. □

8.3.2. Homomorfismy a izomorfismy svazů

Definice 8.3.2. Buďte $(X, \wedge, \vee)$, $(Y, \wedge, \vee)$ svazy. Zobrazení $f\colon X \to Y$ je *homomorfismus svazů*, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in X$

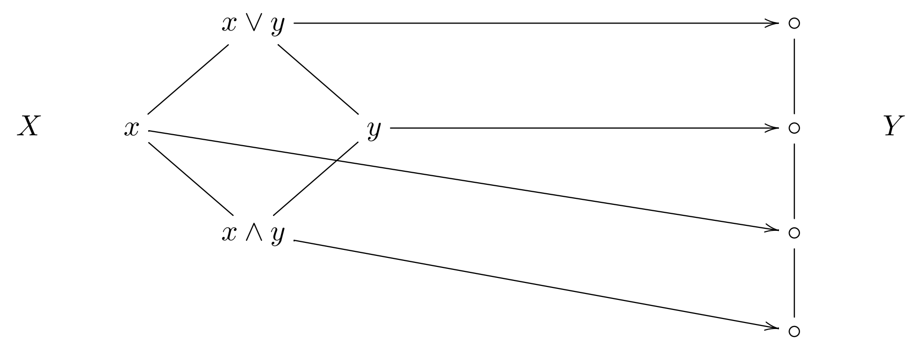
$$f(x_1 \wedge x_2) = f(x_1) \wedge f(x_2)$$
$$f(x_1 \vee x_2) = f(x_1) \vee f(x_2).$$

Tvrzení 8.3.1. *Každý homomorfismus svazů je izotonní zobrazení.*

Důkaz. Buďte $(X, \wedge, \vee)$, $(Y, \wedge, \vee)$ svazy, $f\colon X \to Y$ homomorfismus a $x_1, x_2 \in X$ takové, že $x_1 \leq x_2$, tedy $x_1 \wedge x_2 = x_1$. Potom $f(x_1) \wedge f(x_2) = f(x_1 \wedge x_2) = f(x_1)$, tedy $f(x_1) \leq f(x_2)$. □

Izotonní zobrazení svazů však nemusí být homomorfismus svazů:

Příklad. Buď f zobrazení podle obrázku:



Pak f je izotonní zobrazení svazů, ale není homomorfismus svazů, protože

$$f(x) \vee f(y) = f(y) \neq f(x \vee y).$$ □

Definice 8.3.3. *Izomorfismus svazů* je homomorfismus svazů, který je bijektivní.

Cvičení. Buď f zobrazení svazů. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

(1) f je izomorfismus uspořádaných množin;
(2) f je izomorfismus svazů. □