

2. DETERMINANT

2.1. Permutace

Definice 2.1.1. Buď M konečná množina. *Permutace* na množině M je bijekce $M \rightarrow M$.

Buď σ permutace na množině M a $m \in M$. Obraz $\sigma(m)$ prvku m při permutaci σ se často značí σ_m .

Definice 2.1.2. *Transpozice* je permutace, při níž se vzájemně vymění dva prvky a ostatní se nezmění.

Tvrzení 2.1.1. Každá permutace je složením konečně mnoha transpozic.

Nechť $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Množinu všech permutací na množině I_n značíme S_n . Permutaci $\sigma \in S_n$ můžeme zapisovat jako uspořádanou n -tici obrazů prvků množiny I_n , tedy $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$.

Definice 2.1.3. Buď $\sigma \in S_n$. Nechť $i, j \in I_n$ jsou takové, že $i < j$ a $\sigma_i > \sigma_j$. Pak dvojice (σ_i, σ_j) tvoří *inverzi* permutace σ .

Počet inverzí permutace σ značíme $\text{inv } \sigma$. Je zřejmé, že $\text{inv } \sigma = \text{inv } \sigma^{-1}$.

Definice 2.1.4. *Signum (znaménko)* permutace $\sigma \in S_n$ je $\text{sgn } \sigma = (-1)^{\text{inv } \sigma}$. Permutace s $\text{sgn } \sigma = 1$ je *sudá*, permutace s $\text{sgn } \sigma = -1$ je *lichá*.

Jelikož $\text{inv } \sigma = \text{inv } \sigma^{-1}$, $\text{sgn } \sigma = \text{sgn } \sigma^{-1}$.

Tvrzení 2.1.2. Budte $\rho, \sigma \in S_n$. Pak $\text{sgn}(\pi \circ \rho) = \text{sgn } \pi \cdot \text{sgn } \rho$.

Cvičení. Ukažte, že každá transpozice je lichá permutace. □

Více o permutacích lze najít například v [Marvan, 4. Permutace].

2.2. Determinant

2.2.1. Definice a determinanty některých typů matic

Definice 2.2.1. Buď A matice typu $n \times n$ nad polem P . *Determinant* matice A je

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 A_{\sigma_2}^2 \cdots A_{\sigma_n}^n \in P.$$

Číslo n je *řád* determinantu.

Pro determinant matice A se používá značení

$$\det A = |A| = \det \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix}.$$

Díky tomu, že σ je permutace (bijektivní zobrazení) na množině I_n , můžeme ji chápat jako zobrazení z množiny všech řádkových indexů do množiny všech sloupkových indexů matice A . Ke každému řádku je tedy vzájemně jednoznačně přiřazen sloupek a v každém součinu $A_{\sigma_1}^1 \cdot A_{\sigma_2}^2 \cdot \dots \cdot A_{\sigma_n}^n$ je tedy právě jeden prvek z každého řádku a právě jeden prvek z každého sloupku. Determinant matice A je tedy součet všech takovýchto součinů (pro všechny permutace σ na množině I_n) opatřených buď znaménkem $+$, jde-li o sudou permutaci, nebo znaménkem $-$, jde-li o lichou permutaci.

Příklad. (1) Nechť $n = 1$. Tedy, $I_1 = \{1\}$, $S_1 = \{\text{id}: \{1\} \rightarrow \{1\}\}$ a $\text{sgn id} = 1$. Pro matici $A = (a)$ je $\det A = \text{sgn id} \cdot A_{\text{id}_1}^1 = 1 \cdot A_1^1 = a$.

(2) Nechť $n = 2$. Tedy, $I_2 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{\text{id}, \tau\}$, kde $\text{id} = (1, 2)$ a $\tau = (2, 1)$ (viz zápis permutace na I_n), $\text{sgn id} = 1$ a $\text{sgn } \tau = -1$. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

je $\det A = \text{sgn id} \cdot A_{\text{id}_1}^1 A_{\text{id}_2}^2 + \text{sgn } \tau \cdot A_{\tau_1}^1 A_{\tau_2}^2 = 1 \cdot A_1^1 A_2^2 + (-1) \cdot A_2^1 A_1^2 = ad - bc$. Vzorec pro výpočet determinantu matice druhého řádu je možno odvodit z následujícího obrázku:

$$\begin{array}{c} \oplus \quad \ominus \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{vmatrix} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \ominus \quad \oplus \end{array} = A_1^1 A_2^2 - A_2^1 A_1^2$$

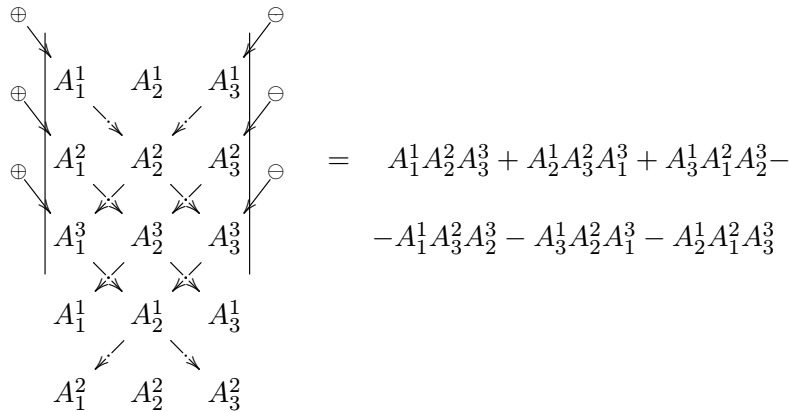
(3) Nechť $n = 3$. Tedy, $I_3 = \{1, 2, 3\}$, $S_3 = \{\text{id}, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, kde $\text{id} = (1, 2, 3)$, $\sigma_1 = (2, 3, 1)$, $\sigma_2 = (3, 1, 2)$, $\tau_1 = (1, 3, 2)$, $\tau_2 = (3, 2, 1)$, $\tau_3 = (2, 1, 3)$ (viz zápis permutace na I_n), $\text{sgn id} = \text{sgn } \sigma_1 = \text{sgn } \sigma_2 = 1$ a $\text{sgn } \tau_1 = \text{sgn } \tau_2 = \text{sgn } \tau_3 = -1$. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

je

$$\begin{aligned} \det A &= \text{sgn id} \cdot A_{\text{id}_1}^1 A_{\text{id}_2}^2 A_{\text{id}_3}^3 + \text{sgn } \sigma_1 \cdot A_{\sigma_1(1)}^1 A_{\sigma_1(2)}^2 A_{\sigma_1(3)}^3 + \\ &\quad + \text{sgn } \sigma_2 \cdot A_{\sigma_2(1)}^1 A_{\sigma_2(2)}^2 A_{\sigma_2(3)}^3 + \text{sgn } \tau_1 \cdot A_{\tau_1(1)}^1 A_{\tau_1(2)}^2 A_{\tau_1(3)}^3 + \\ &\quad + \text{sgn } \tau_2 \cdot A_{\tau_2(1)}^1 A_{\tau_2(2)}^2 A_{\tau_2(3)}^3 + \text{sgn } \tau_3 \cdot A_{\tau_3(1)}^1 A_{\tau_3(2)}^2 A_{\tau_3(3)}^3 = \\ &= 1 \cdot A_1^1 A_2^2 A_3^3 + 1 \cdot A_2^1 A_3^2 A_1^3 + 1 \cdot A_3^1 A_1^2 A_2^3 + \\ &\quad + (-1) \cdot A_1^1 A_3^2 A_2^3 + (-1) \cdot A_3^1 A_2^2 A_1^3 + (-1) \cdot A_2^1 A_1^2 A_3^3 = \\ &= aei + bfg + cdh - afh - ceg - bdi. \end{aligned}$$

Vzorec pro výpočet determinantu matice třetího řádu lze odvodit z následujícího obrázku pomocí *Sarrusova pravidla* (pro matice vyššího řádu žádné takové pravidlo neexistuje):



(4) Nechť $n = 4$. Na čtyřprvkové množině existují 24 permutace, takže při výpočtu determinantu podle definice dostaneme 24 sčítance. Uvedeme si i jiné způsoby výpočtu determinantu. □

Cvičení. Spočítejte determinanty matic

- | | | | |
|---|---|--|---|
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ |

□

Tvrzení 2.2.1. *Determinant matice s nulovým řádkem nebo nulovým sloupkem je roven nule.*

Důkaz. Buď A matice typu $n \times n$ s nulovým řádkem nebo nulovým sloupkem. Pro každé $\sigma \in S_n$ je v součinu $A_{\sigma_1}^1 A_{\sigma_2}^2 \cdots A_{\sigma_n}^n$ právě jeden prvek z každého, tedy i nulového řádku a právě jeden prvek z každého, tedy i nulového sloupku. Proto je každý takový součin roven nule. \square

Cvičení. Dokažte, že pro determinanty lišící se pouze v jednom řádku platí

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & \cdots & A_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^i & \cdots & A_n^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^n & \cdots & A_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1^1 & \cdots & A_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1^i & \cdots & B_n^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^n & \cdots & A_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & \cdots & A_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^i + B_1^i & \cdots & A_n^i + B_n^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^n & \cdots & A_n^n \end{vmatrix}. \quad \square$$

Příklad.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 + (-6) + 3 = 0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}. \quad \square$$

Definice 2.2.2. Čtvercová matice je (*horní* resp. *dolní*) *trojúhelníková* (nebo v (*horním* resp. *dolním*) *trojúhelníkovém tvaru*), jestliže pod resp. nad diagonálou má jen nuly, tedy $A_j^i = 0$ pro $i > j$ resp. pro $i < j$.

Každá čtvercová matice ve schodovitém tvaru je také v (horním) trojúhelníkovém tvaru a tedy každou čtvercovou matici lze pomocí řádkových elementárních úprav převést na trojúhelníkový tvar.

Tvrzení 2.2.2. *Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na diagonále.*

Důkaz. Buď A horní trojúhelníková matice typu $n \times n$. Buď σ permutace na množině I_n . Jestliže pro nějaké $i \in I_n$ platí $\sigma_i < i$, pak $A_{\sigma_i}^i$ je pod diagonálou, tedy $A_{\sigma_i}^i = 0$ a také $\text{sgn } \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \cdots A_{\sigma_i}^i \cdots A_{\sigma_n}^n = 0$. Jediná permutace σ taková, že $\sigma_i \geq i$ pro každé i , je identita. Jelikož $\text{sgn } \text{id} = 1$, $\det A = A_{\sigma_1}^1 A_{\sigma_2}^2 \cdots A_{\sigma_n}^n$.

Pro dolní trojúhelníkové matice je důkaz analogický. \square

Důsledek. (1) *Determinant matice ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků na diagonále.*

(2) *Determinant diagonální matice je roven součinu prvků na diagonále.*

(3) *Determinant jednotkové matice je roven 1.*

Příklad.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24. \quad \square$$

Determinanty elementárních matic jsou nenulové.

Příklad. (1) $E^{i,j}(c)$ je trojúhelníková matice a na diagonále má jen jedničky, proto

$$\det E^{i,j}(c) = 1.$$

(2) $E^i(c)$ je diagonální matice a na diagonále má jedno c a jinak jen jedničky, proto

$$\det E^i(c) = c.$$

(3) Jelikož v každém řádku a v každém sloupku matice $E^{i,j}$ je právě jedna jednička a ostatní prvky jsou nuly, existuje jediná permutace τ na I_n , pro kterou jsou všechny $(E^{i,j})_{\tau_1}^1, \dots, (E^{i,j})_{\tau_n}^n$ rovny jedné. Pro ostatní permutace je aspoň jeden z těchto prvků nulový. Díky tvaru $E^{i,j}$ je τ transpozice, takže $\text{sgn } \tau = -1$. Proto

$$\det E^{i,j} = (-1) \cdot (E^{i,j})_{\tau_1}^1 \cdots (E^{i,j})_{\tau_n}^n = -1. \quad \square$$

Tvrzení 2.2.3. Pro každou čtvercovou matici A platí $\det A^T = \det A$.

Důkaz. Činitele v součinu $A_1^{\sigma_1} \cdots A_i^{\sigma_i} \cdots A_n^{\sigma_n}$ můžeme uspořádat podle vzrůstajícího řádkového indexu $A_{\sigma_1}^1 \cdots A_{\sigma_i}^i \cdots A_{\sigma_n}^n$, protože σ_i^{-1} -tý činitel v původním součinu je $A_{\sigma_i}^{\sigma_i^{-1}} = A_{\sigma_i}^i$. Potom

$$\begin{aligned} \det A^T &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \cdot (A^T)_{\sigma_1}^1 \cdots (A^T)_{\sigma_i}^i \cdots (A^T)_{\sigma_n}^n = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \cdot A_1^{\sigma_1} \cdots A_i^{\sigma_i} \cdots A_n^{\sigma_n} = && \text{(přeuspořádání)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \cdots A_{\sigma_i}^i \cdots A_{\sigma_n}^n = && \text{(sgn } \sigma^{-1} = \text{sgn } \sigma) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn } \sigma^{-1} \cdot A_{\sigma_1}^1 \cdots A_{\sigma_i}^i \cdots A_{\sigma_n}^n = \\ &= \det A, \end{aligned}$$

protože když σ projde všechny prvky S_n , tak σ^{-1} také. □

Tvrzení 2.2.4. Determinant matice, která má buď dva řádky stejné nebo dva sloupky stejné, je roven nule.

Důkaz. Buď A matice typu $n \times n$, která má i -tý řádek stejný jako j -tý ($i \neq j$), tedy $A_k^i = A_k^j$ pro každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Buď $\tau_{ij} \in S_n$ transpozice vyměňující i, j , čili $\text{sgn } \tau_{ij} = -1$. Pro každou permutaci $\sigma \in S_n$ označme $\sigma' = \sigma \circ \tau_{ij}$. Pak $\text{sgn } \sigma' = \text{sgn } \sigma \cdot \text{sgn } \tau_{ij} = -\text{sgn } \sigma$ a člen determinantu odpovídající permutaci σ' je

$$\begin{aligned} \text{sgn } \sigma' \cdot A_{\sigma'_1}^1 \cdots A_{\sigma'_i}^i \cdots A_{\sigma'_j}^j \cdots A_{\sigma'_n}^n &= \\ &= -\text{sgn } \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \cdots A_{\sigma_j}^i \cdots A_{\sigma_i}^j \cdots A_{\sigma_n}^n = && (A_{\sigma_j}^i = A_{\sigma_j}^j \text{ a } A_{\sigma_i}^j = A_{\sigma_i}^i) \\ &= -\text{sgn } \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \cdots A_{\sigma_i}^j \cdots A_{\sigma_j}^i \cdots A_{\sigma_n}^n, \end{aligned}$$

a je tedy opačný k členu odpovídajícímu permutaci σ .

Množinu S_n , která má sudý počet prvků, můžeme rozložit na podmnožiny $\{\sigma, \sigma'\}$, které jsou dvouprvkové, protože $\sigma' \neq \sigma$ a $\sigma'' = \sigma$ (ověřte), a každá z nich přispívá k determinantu nulou. Takže $\det A = 0$.

Když má matice dva stejné sloupky, lze tvrzení dokázat analogicky nebo je možno použít předchozí tvrzení. □

2.2.2. Elementární úpravy

Tvrzení 2.2.5. (1) Přičtením násobku jednoho řádku, resp. sloupku k jinému řádku, resp. sloupku se determinant nezmění.

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i + cA_1^j & A_2^i + cA_2^j & \dots & A_n^i + cA_n^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix}.$$

(2) Vynásobením jednoho řádku, nebo sloupku prokem c se determinant vynásobí prokem c .

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ cA_1^i & cA_2^i & \dots & cA_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix}.$$

(3) Vzájemnou výměnou dvou řádků, nebo dvou sloupků determinant změní znaménko.

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^j & A_2^j & \dots & A_n^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^j & A_2^j & \dots & A_n^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix}.$$

Důkaz. Uvedeme pouze důkaz pro řádkové úpravy, pro sloupkové je analogický.

Buďte A čtvercová matice a B upravená matice.

(1) Nechť B vznikne z A přičtením c -násobku j -tého řádku k i -tému řádku, čili $B_{\circ}^i = A_{\circ}^i + cA_{\circ}^j$ a ostatní řádky matice B jsou stejné jako řádky matice A . Potom

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot B_{\sigma_1}^1 \dots B_{\sigma_i}^i \dots B_{\sigma_j}^j \dots B_{\sigma_n}^n = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots (A_{\sigma_i}^i + cA_{\sigma_i}^j) \dots A_{\sigma_j}^j \dots A_{\sigma_n}^n = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_i}^i \dots A_{\sigma_j}^j \dots A_{\sigma_n}^n + \\ &\quad + c \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_i}^j \dots A_{\sigma_j}^j \dots A_{\sigma_n}^n}_{\text{determinant matice, kde } i\text{-tý řádek je stejný jako } j\text{-tý}} = \\ &= \det A + c \cdot 0 = \det A. \end{aligned}$$

(2) Necht B vznikne z A vynásobením i -tého řádku prvkem c , čili $B_{\circ}^i = cA_{\circ}^i$ a ostatní řádky matice B jsou stejné jako řádky matice A . Potom

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot B_{\sigma_1}^1 \dots B_{\sigma_i}^i \dots B_{\sigma_n}^n = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots cA_{\sigma_i}^i \dots A_{\sigma_n}^n = \\ &= c \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_i}^i \dots A_{\sigma_n}^n = \\ &= c \det A. \end{aligned}$$

(3) Necht B vznikne z A vzájemnou výměnou i -tého řádku a j -tého řádku, čili $B_{\circ}^i = A_{\circ}^j$, $B_{\circ}^j = A_{\circ}^i$ a ostatní řádky matice B jsou stejné jako řádky matice A . Buď $\tau_{ij} \in S_n$ transpozice vyměňující i, j , čili $\operatorname{sgn} \tau_{ij} = -1$. Pro každou permutaci $\sigma \in S_n$ označme $\sigma' = \sigma \circ \tau_{ij}$. Pak $\sigma'_i = \sigma_j$, $\sigma'_j = \sigma_i$ a $\sigma'_k = \sigma_k$ pro $k \neq i, j$ a $\operatorname{sgn} \sigma' = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \tau_{ij} = -\operatorname{sgn} \sigma$. Potom

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot B_{\sigma_1}^1 \dots B_{\sigma_i}^i \dots B_{\sigma_j}^j \dots B_{\sigma_n}^n = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_i}^j \dots A_{\sigma_j}^i \dots A_{\sigma_n}^n = && \text{(komutativita násobení)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_j}^i \dots A_{\sigma_i}^j \dots A_{\sigma_n}^n = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma'_1}^1 \dots A_{\sigma'_i}^i \dots A_{\sigma'_j}^j \dots A_{\sigma'_n}^n = && (\operatorname{sgn} \sigma' = -\operatorname{sgn} \sigma) \\ &= - \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma' \cdot A_{\sigma'_1}^1 \dots A_{\sigma'_i}^i \dots A_{\sigma'_j}^j \dots A_{\sigma'_n}^n = \\ &= -\det A, \end{aligned}$$

protože když σ projde všechny prvky S_n , tak σ' také. □

Cvičení. Jaký je vztah mezi $\det(cA)$ a $\det A$? □

Cvičení. Necht A je matice typu $n \times n$ taková, že $A^T = -A$ (taková matice se nazývá *antisymetrická*). Ukažte, že je-li n liché číslo, pak $\det A = 0$. □

Příklad.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \end{vmatrix} \\ 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} &= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

Důsledek. *Buďte Q elementární matice a A matice stejného typu. Pak*

$$\det QA = \det Q \cdot \det A.$$

Důkaz. (1) $\det(E^{i,j}(c)A) = \det A = 1 \cdot \det A = \det E^{i,j}(c) \cdot \det A.$

$$(2) \det(E^i(c)A) = c \det A = \det E^i(c) \cdot \det A.$$

$$(3) \det(E^{i,j}A) = (-1) \cdot \det A = \det E^{i,j} \cdot \det A. \quad \square$$

Cvičení. Dokažte, že $\det E^{i,j} = -1$ s využitím předchozího důsledku a toho, že vzájemná výměna dvou řádků je složením konečně mnoha řádkových elementárních úprav ostatních druhů. \square

Tvrzení 2.2.6. *Matice je regulární právě tehdy, když má nenulový determinant.*

Důkaz. Buď A regulární matice, tedy $A = Q_1 \cdots Q_k$, kde Q_1, \dots, Q_k jsou elementární matice. Potom

$$\begin{aligned} \det A &= \det(Q_1 \cdots Q_k) = \det Q_1 \cdot \det(Q_2 \cdots Q_k) = \cdots = \\ &= \det Q_1 \cdot \det Q_2 \cdots \det Q_k, \end{aligned}$$

což není rovno nule, protože determinanty elementárních matic jsou nenulové.

Nechť $\det A \neq 0$. Pomocí řádkových elementárních úprav převedeme A na schodovitý tvar B , tedy $B = Q_k \cdots Q_1 A$, kde Q_1, \dots, Q_k jsou příslušné elementární matice. Potom

$$\begin{aligned} \det B &= \det(Q_k \cdots Q_1 A) = \det Q_k \det(Q_{k-1} \cdots Q_1 A) = \cdots = \\ &= \det Q_k \det Q_{k-1} \cdots \det Q_1 \det A \neq 0. \end{aligned}$$

Jelikož B je ve schodovitém tvaru a její determinant je tedy součinem prvků na diagonále, na diagonále není žádná nula. To znamená, že B nemá nulový řádek, je tedy regulární a A také. \square

Důsledek. *Matice je regulární právě tehdy, když má nenulový determinant, a to má právě tehdy, když je invertibilní, a to je právě tehdy, když je ekvivalentní jednotkové matici.*

Tvrzení 2.2.7 (Cauchyho věta). *Buďte A, B čtvercové matice stejného typu. Pak*

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

Důkaz. (1) Je-li A regulární, tedy součin $Q_1 Q_2 \cdots Q_k$ elementárních matic, pak

$$\begin{aligned} \det AB &= \det(Q_1 \cdots Q_k B) = \det Q_1 \cdot \det(Q_2 \cdots Q_k B) = \cdots = \\ &= \det Q_1 \det Q_2 \cdots \det Q_k \det B = \det(Q_1 Q_2 \cdots Q_k) \det B = \\ &= \det A \det B. \end{aligned}$$

(2) Je-li A singulární, podle Tvrzení 1.5.5 je AB také singulární a tedy

$$\det AB = 0 = \det A = \det A \cdot \det B. \quad \square$$

Cvičení. $\det A^{-1} = 1/\det A.$ \square

Lemma 2.2.8.

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_k^1 & A_{k+1}^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^k & \dots & A_k^k & A_{k+1}^k & \dots & A_n^k \\ 0 & \dots & 0 & A_{k+1}^{k+1} & \dots & A_n^{k+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{k+1}^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_k^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^k & \dots & A_k^k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{k+1}^{k+1} & \dots & A_n^{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k+1}^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix}.$$

Determinant matice A v předchozím tvrzení se *rozpadá na subdeterminanty*: jeden subdeterminant řádu k a jeden subdeterminant řádu $n - k$. Stručně ale výstižně lze toto tvrzení vyjádřit zápisem

$$\begin{vmatrix} A' & X \\ 0 & A'' \end{vmatrix} = |A'| \cdot |A''|.$$

Příklad.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot 8 = 2 \cdot 1 \cdot 8 = 16$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 \cdot (-2) = 6 \quad \square$$

2.2.3. Laplaceův rozvoj

Definice 2.2.3. Buď A matice typu $n \times n$. Determinant řádu $n - 1$ matice vzniklé z A vynecháním jednoho řádku a jednoho sloupku je *minor*. Při vynechání i -tého řádku a j -tého sloupku příslušný minor označujeme

$$\bar{A}_j^i.$$

Kofaktor (nebo *algebraický doplněk*) prvku A_j^i je

$$\hat{A}_j^i = (-1)^{i+j} \bar{A}_j^i.$$

Tedy, kofaktor (algebraický doplněk) prvku A_j^i je $(-1)^{i+j}$ -násobek determinantu matice, která vznikne z matice A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupku.

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\bar{A}_1^1 = d, \quad \bar{A}_2^1 = c, \quad \bar{A}_1^2 = b, \quad \bar{A}_2^2 = a,$$

$$\hat{A}_1^1 = (-1)^{1+1} \bar{A}_1^1 = d,$$

$$\hat{A}_2^1 = (-1)^{1+2} \bar{A}_2^1 = -c,$$

$$\hat{A}_1^2 = (-1)^{2+1} \bar{A}_1^2 = -b,$$

$$\hat{A}_2^2 = (-1)^{2+2} \bar{A}_2^2 = a. \quad \square$$

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\bar{A}_1^1 = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}, \quad \bar{A}_2^1 = \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}, \quad \bar{A}_3^1 = \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \bar{A}_3^3 = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix},$$

$$\hat{A}_1^1 = (-1)^{1+1}\bar{A}_1^1 = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}, \quad \hat{A}_2^1 = (-1)^{1+2}\bar{A}_2^1 = -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix},$$

$$\hat{A}_3^1 = (-1)^{1+3}\bar{A}_3^1 = \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}, \quad \hat{A}_3^3 = (-1)^{3+3}\bar{A}_3^3 = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}. \quad \square$$

Tvrzení 2.2.9 (Laplaceova věta o rozvoji determinantu). *Bud' A matice typu $n \times n$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí*

$$\begin{aligned} \det A &= A_1^i \hat{A}_1^i + A_2^i \hat{A}_2^i + \dots + A_n^i \hat{A}_n^i = \sum_{j=1}^n A_j^i \hat{A}_j^i = \\ &= A_i^1 \hat{A}_i^1 + A_i^2 \hat{A}_i^2 + \dots + A_i^n \hat{A}_i^n = \sum_{j=1}^n A_i^j \hat{A}_i^j. \end{aligned}$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_{j-1}^1 & A_j^1 & A_{j+1}^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & \dots & A_{j-1}^i & A_j^i & A_{j+1}^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \dots & A_{j-1}^n & A_j^n & A_{j+1}^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = \\ &= \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_{j-1}^1 & A_j^1 & A_{j+1}^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_j^i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \dots & A_{j-1}^n & A_j^n & A_{j+1}^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = \\ &= \sum_{j=1}^n A_j^i \begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_{j-1}^1 & A_j^1 & A_{j+1}^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \dots & A_{j-1}^n & A_j^n & A_{j+1}^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ukažme, že

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_{j-1}^1 & A_j^1 & A_{j+1}^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & \dots & A_{j-1}^n & A_j^n & A_{j+1}^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = \hat{A}_j^i.$$

Vyměňujeme i -tý řádek $(0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0)$ s předchozími řádky tak dlouho, až bude prvním řádkem; k tomu je potřeba $i - 1$ výměn. Poté vyměňujeme j -tý sloupek $(1 \ A_j^1 \dots A_j^{i-1} \ A_j^{i+1} \dots A_j^n)^T$ s předchozími sloupkami tak dlouho, až bude prvním sloupkem; k tomu je potřeba $j - 1$ výměn. Takto vzniklý determinant je tedy nutné vynásobit číslem $(-1)^{i-1}(-1)^{j-1} = (-1)^{i-1+j-1} = (-1)^{i+j}$ a navíc se rozpadá na subdeterminanty $\det(1)$ a \bar{A}_j^i . Proto $\det A = \sum_{j=1}^n A_j^i \cdot (-1)^{i+j} \bar{A}_j^i = \sum_{j=1}^n A_j^i \hat{A}_j^i$ a máme rozvoj podle i -tého řádku.

Rozvoj podle i -tého sloupku získáme analogicky. \square

Definice 2.2.4. Vztah v Laplaceově větě je *Laplaceův rozvoj podle i -tého řádku* resp. *podle i -tého sloupku*.

Příklad.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} &= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + (-2) = 6 \quad \square \end{aligned}$$