2. přednáška, 3. 10. 2023

Definice 1.3.6. Mějme nenulovou matici. *Gaussova eliminace* je úprava matice podle následujícího algoritmu.
Buď $i = 1$.

(1) Uvažujme první nenulový sloupek, který má nějaký nenulový prvek v i-tém nebo nižším řádku.
(2) Není-li v i-tém řádku uvažovaného sloupku nenulový prvek, vyměníme i-tý řádek s vhodným nižším řádkem.
(3) V uvažovaném sloupku vynulujeme prvky v řádcích pod i-tým řádkem přičtením vhodných násobků i-tého řádku.
(4) Vezměme i o 1 větší ($i := i + 1$). Existuje-li nenulový sloupek, který má nějaký nenulový prvek v i-tém nebo nižším řádku, vraťme se do bodu (1). Jestliže takový sloupek neexistuje, algoritmus končí.

Tvrzení 1.3.2. *Každá matice je řádkově ekvivalentní matici ve schodovitém tvaru.*

Důkaz. Nulová matice je ve schodovitém tvaru. Libovolnou nenulovou matici upravíme pomocí Gaussovy eliminace. Všechny provedené úpravy jsou řádkové elementární úpravy a z postupu při Gaussově eliminaci vyplývá, že každý nenulový řádek, kromě prvního řádku, začíná více nulami než řádek předchozí. □

Z Tvrzení 1.5.2 a 1.5.3 vyplývá, že počet nenulových řádků v matici získané Gaussovou eliminací je určen jednoznačně, nezávisí na tom, jak byla Gaussova eliminace použita, přesněji, k jaké výměně řádků došlo v bodě (2).

Definice 1.3.7. Sloupek matice je *bázový*, jestliže není nulový a není lineární kombinací předchozích sloupků.

Bázové sloupky matice jsou právě ty sloupky, které jsou uvažovány v bodě (1) v Gaussově eliminaci.

Pozice (indexy) bázových sloupků v matici jsou maticí určeny jednoznačně.

Definice 1.3.8. Mějme nenulovou matici. *Gaussova–Jordanova eliminace* je úprava matice podle následujícího algoritmu.
Buď $i = 1$.

(1) Uvažujme první nenulový sloupek, který má nějaký nenulový prvek v i-tém nebo nižším řádku.
(2) Není-li v i-tém řádku uvažovaného sloupku nenulový prvek, vyměníme i-tý řádek s vhodným nižším řádkem.
(3) i-tý řádek vynásobíme převrácenou hodnotou jeho prvního nenulového prvku.
(4) V uvažovaném sloupku vynulujeme prvky mimo i-tý řádek přičtením vhodných násobků i-tého řádku.
(5) Vezměme i o 1 větší ($i := i + 1$). Existuje-li nenulový sloupek, který má nějaký nenulový prvek v i-tém nebo nižším řádku, vraťme se do bodu (1). Jestliže takový sloupek neexistuje, algoritmus končí.

Gaussovu-Jordanovu eliminaci je možné ekvivalentně definovat i tak, že matici upravíme pomocí Gaussovy eliminace (na schodovitý tvar), každý nenulový řádek vynásobíme převrácenou hodnotou jeho prvního nenulového prvku a vynulujeme všechny prvky nad všemi prvními nenulovými prvky řádků.

Tvrzení 1.3.3. *Každá matice je řádkově ekvivalentní matici v Gaussově–Jordanově tvaru.*

Důkaz. Nulová matice je v Gaussově–Jordanově tvaru. Libovolnou nenulovou matici upravíme pomocí Gaussovy–Jordanovy eliminace. Všechny provedené úpravy jsou řádkové elementární úpravy a z postupu při Gaussově–Jordanově eliminaci vyplývá, že výsledná matice je v Gaussově–Jordanově tvaru. □

Maticí je jednoznačně určena řádkově ekvivalentní matice v Gaussově-Jordanově tvaru, tedy pro každou matici existuje právě jedna matice v Gaussově-Jordanově tvaru řádkově ekvivalentní původní matici.

Tvrzení 1.3.4. *Každá nenulová matice je ekvivalentní matici v Gaussově kanonickém tvaru.*

Důkaz. S použitím řádkových i sloupkových elementárních úprav a vhodnou úpravou Gaussovy–Jordanovy eliminace získáme algoritmus, který převádí libovolnou nenulovou matici na ekvivalentní matici v Gaussově kanonickém tvaru. Podrobnosti ponecháme jako cvičení. □

1.3.3. Elementární matice

Definice 1.3.9. *Elementární matice* jsou:

(1) pro $i \neq j$

$$E^{i,j}(c) = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & c & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ i\text{-tý řádek} \\ \\ j\text{-tý řádek} \\ \\ \\ \end{array}$$

(2) pro $c \neq 0$

$$E^{i}(c) = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & c & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ i\text{-tý řádek} \\ \\ \\ \end{array}$$

(3) pro $i \neq j$

$$E^{i,j} = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ i\text{-tý řádek} \\ \\ j\text{-tý řádek} \\ \\ \\ \end{array}$$

Každá elementární matice vznikne z jednotkové matice provedením vhodné řádkové nebo sloupkové elementární úpravy.

Matice $E^{i,j}(c)$ vznikne z jednotkové matice E přičtením c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku a od jednotkové matice se liší jen tím, že $(E^{i,j}(c))^i_j = c$, zatímco $E^i_j = 0$.

Matice $E^i(c)$ vznikne z jednotkové matice E vynásobením i-tého řádku prvkem c a od jednotkové matice se liší jen tím, že $(E^i(c))^i_i = c$, zatímco $E^i_i = 1$.

Matice $E^{i,j}$ vznikne z jednotkové matice E výměnou i-tého řádku a j-tého řádku a od jednotkové matice liší jen tím, že i-tý a j-tý řádky jsou vzájemně vyměněny.

Lemma 1.3.5. *Buďte A, B matice.*
(1) Matice B může vzniknout z matice A pomocí jedné řádkové elementární úpravy právě tehdy, když existuje elementární matice Q taková, že $B = QA$.
(2) Matice B může vzniknout z matice A pomocí jedné sloupkové elementární úpravy právě tehdy, když existuje elementární matice Q taková, že $B = AQ$.

Důkaz. Přímým výpočtem lze ověřit, že přičtení c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku je totéž co vynásobení maticí $E^{i,j}(c)$ zleva, vynásobení i-tého řádku prvkem $c \in P$ je totéž co vynásobení maticí $E^i(c)$ zleva a výměna i-tého řádku a j-tého řádku je totéž co vynásobení maticí $E^{i,j}$ zleva. Viz také komentář za Definicí 1.2.4 součinu matic. Analogicky pro sloupkové úpravy a násobení zprava. Cvičení. □

Příklad. Buďte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ B_1 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \ B_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$B_1 = E^{1,3}(2) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot A^1_\circ + 2 \cdot A^3_\circ \\ A^2_\circ \\ A^3_\circ \end{pmatrix}$$

$$B_2 = E^3(2) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_\circ \\ A^2_\circ \\ 2 \cdot A^3_\circ \end{pmatrix}$$

$$B_3 = E^{1,3} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^3_\circ \\ A^2_\circ \\ A^1_\circ \end{pmatrix}.$$ □

Lemma 1.3.6. *Transponované matice k elementárním maticím jsou elementární matice.*

Důkaz. Cvičení. □

1.4. Inverzní matice

Definice 1.4.1. Buď A čtvercová matice. Matice X je *inverzní* k matici A, je-li stejného typu a platí

$$AX = XA = E.$$

Inverzní matice k matici A se značí A^{-1}. Matice je *invertibilní*, existuje-li matice k ní inverzní.

Příklad. (1) Každá jednotková matice E je invertibilní a $E^{-1} = E$.
(2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ je invertibilní, protože $A \cdot A = E$, a tedy $A^{-1} = A$.

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ není invertibilní, protože pro libovolnou matici X typu 2×2 AX má druhý řádek nulový a není to tedy jednotková matice.

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$ není invertibilní, protože pro libovolnou matici X typu 2×2 XA má první sloupek nulový a není to tedy jednotková matice.

(5) Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Předpokládejme, že X je inverzní k A. Pak $AX = E$, tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z toho dostaneme rovnosti

$$a - c = 1, \quad b - d = 0, \quad a - c = 0, \quad b - d = 1.$$

Ze třetí rovnosti máme $a = c$ a po dosazení do první rovnosti máme $0 = 1$, což je spor. Z toho vyplývá, že neexistuje matice X taková, že $AX = E$, a matice A tedy není invertibilní.

(6) Žádná nulová matice není invertibilní.

(7) Elementární matice jsou invertibilní a přímým výpočtem lze ověřit (cvičení), že

$$(E^{i,j}(c))^{-1} = E^{i,j}(-c), \qquad (E^i(c))^{-1} = E^i(c^{-1}), \qquad (E^{i,j})^{-1} = E^{i,j}.$$ □

Tvrzení 1.4.1. *Ke každé matici existuje nejvýše jedna inverzní matice.*

Důkaz. Předpokládejme, že X', X'' jsou inverzní matice k matici A. Tedy $AX' = X'A = AX'' = X''A = E$. Potom $X' = EX' = X''AX' = X''E = X''$. □

Tvrzení 1.4.2. *Nechť $A, A_1, \ldots, A_n$ jsou invertibilní matice stejného typu. Potom*

(1) $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ je invertibilní a $(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}$;
(2) A^{-1} je invertibilní a $(A^{-1})^{-1} = A$;
(3) A^{T} je invertibilní a $(A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}}$.

Důkaz. (1) $(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) \cdot (A_n^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) = E = (A_n^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) \cdot (A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)$ a podle definice inverzní matice tedy $(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}$.

(2) $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ a podle definice inverzní matice tedy $(A^{-1})^{-1} = A$.

(3) $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, tedy $E = E^{\mathsf{T}} = (A^{-1}A)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}}(A^{-1})^{\mathsf{T}}$ a $E = (AA^{-1})^{\mathsf{T}} = (A^{-1})^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}$ a podle definice inverzní matice $(A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}}$. □

Tvrzení 1.4.3. *Nechť A, B jsou čtvercové matice takové, že $AB = E$. Pak $BA = E$, obě matice A, B jsou invertibilní a jsou vzájemně inverzní ($A = B^{-1}$ a $B = A^{-1}$).*

Důkaz. Matici A upravme řádkovými elementárními úpravami na Gaussův–Jordanův tvar G, tedy $G = Q_k \ldots Q_1 A$, kde $Q_1, \ldots, Q_k$ jsou elementární matice příslušné provedeným úpravám. Pak $A = Q_1^{-1} \ldots Q_k^{-1} G$ a $AB = Q_1^{-1} \ldots Q_k^{-1} GB = E$. Matice G nemá nulový řádek, protože jinak by matice GB také měla nulový řádek a takovou matici nelze pomocí řádkových elementárních úprav (v tomto případě reprezentovaných maticemi $Q_1^{-1}, \ldots, Q_k^{-1}$) převést na jednotkovou matici (cvičení). Jelikož G je v Gaussově–Jordanově tvaru a nemá nunový řádek, $G = E$. Pak $A = Q_1^{-1} \ldots Q_k^{-1}$ je invertibilní matice jakožto součin invertibilních matic a existuje tedy A^{-1}.

Potom $BA = EBA = A^{-1}ABA = A^{-1}EA = A^{-1}A = E$. Jelikož $AB = BA = E$, jsou obě matice A, B invertibilní a jsou vzájemně inverzní. □

Nyní zformulujeme důležité kriterium invertibility.

Tvrzení 1.4.4. *Matice je invertibilní právě tehdy, když je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Nechť A je invertibilní matice. Řádkovými elementárními úpravami ji převeďme na Gaussův–Jordanův tvar G, tedy $G = Q_k \dots Q_1 A$, kde $Q_1, \dots, Q_k$ jsou elementární matice příslušné provedeným úpravám. Každá z matic $Q_1, \dots, Q_k, A$ je invertibilní a jejich součin G je také invertibilní. Potom G, jakožto invertibilní matice nemá nulový řádek a $G = E$, jelikož G je v Gaussově–Jordanově tvaru. Matice A je tedy řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.

„$\Leftarrow$“ Předpokládejme, že matice A je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí E, tedy $Q_k \dots Q_1 A = E$, kde $Q_1, \dots, Q_k$ jsou vhodné elementární matice. Označme si $Q = Q_k \dots Q_2 Q_1$, tedy $QA = E$. Podle Tvrzení 1.4.3 je A invertibilní a $A^{-1} = Q$. $\square$

Předchozí tvrzení nám nabízí postup pro výpočet inverzní matice. Podle důkazu totiž $A^{-1} = Q = Q_k \dots Q_2 Q_1 = Q_k \dots Q_2 Q_1 E$, což je matice, která vznikne z jednotkové matice provedením řádkových elementárních úprav odpovídajících násobení elementárními maticemi $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$. To jsou stejné úpravy (resp. matice), které převedly A na E.

Výpočet inverzní matice. K matici A typu $n \times n$ zprava připojíme jednotkovou matici stejného typu a vznikne matice typu $n \times 2n$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots & A_n^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^m & A_2^m & \dots & A_n^m & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

Řádkovými elementárními úpravami ji převedeme na matici, která v levé části má matici B v Gaussově–Jordanově tvaru. Mohou nastat dvě možnosti.

(1) $B = E$. Pak A je invertibilní a v pravé části matice vyjde A^{-1}.
(2) $B \neq E$ (B má nulový řádek). Pak A není invertibilní.

Příklad. Vypočítejme inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Takže A je invertibilní a

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{(ověřte).}$$ □

Příklad. Hledejme inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Matice A tedy není řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí a není invertibilní. □

Cvičení. Pokud existují, spočtěte inverzní matice k maticím

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ □

1.5. Hodnost matice

1.5.1. Lineární nezávislost

Stejně jako v případě lineární kombinace v Definici 1.2.3 následující definice a tvrzení formulujeme pouze pro řádky matice, ale vše lze obdobně formulovat pro sloupky, uspořádané n-tice a matice.

Definice 1.5.1. Množina řádků $\{A_\circ^{i_1}, A_\circ^{i_2}, \ldots, A_\circ^{i_k}\}$ je *lineárně nezávislá*, jestliže pro libovolné $c_1, c_2, \ldots, c_k \in P$ z rovnosti

$$c_1 A_\circ^{i_1} + c_2 A_\circ^{i_2} + \cdots + c_k A_\circ^{i_k} = 0_\circ \qquad \text{vyplývá} \qquad c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0,$$

tj. nulový řádek získáme jedině takovou lineární kombinací daných řádků, ve které jsou všechny koeficienty rovny nule.
Množina řádků $\{A_\circ^{i_1}, A_\circ^{i_2}, \ldots, A_\circ^{i_k}\}$ je *lineárně závislá*, jestliže není lineárně nezávislá. Tedy, existují $c_1, c_2, \ldots, c_k \in P$ taková, že aspoň jedno z nich je nenulové a přitom

$$c_1 A_\circ^{i_1} + c_2 A_\circ^{i_2} + \cdots + c_k A_\circ^{i_k} = 0_\circ.$$

Tvrzení 1.5.1. *Množina řádků je lineárně závislá právě tehdy, když aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních.*

Důkaz. Předpokládejme, že množina řádků $\{A_\circ^{i_1}, A_\circ^{i_2}, \dots, A_\circ^{i_k}\}$ je lineárně závislá. Existují tedy koeficienty $c_1, c_2, \dots, c_k \in P$ takové, že aspoň jeden z nich je nenulový (například c_j) a $c_1 A_\circ^{i_1} + \dots + c_j A_\circ^{i_j} + \dots + c_k A_\circ^{i_k} = 0_\circ$. Potom

$$\begin{aligned} c_j A_\circ^{i_j} &= -c_1 A_\circ^{i_1} - \dots - c_{j-1} A_\circ^{i_{j-1}} - c_{j+1} A_\circ^{i_{j+1}} - \dots - c_k A_\circ^{i_k}, \\ A_\circ^{i_j} &= -\frac{c_1}{c_j} A_\circ^{i_1} - \dots - \frac{c_{j-1}}{c_j} A_\circ^{i_{j-1}} - \frac{c_{j+1}}{c_j} A_\circ^{i_{j+1}} - \dots - \frac{c_k}{c_j} A_\circ^{i_k} \end{aligned}$$

a řádek $A_\circ^{i_j}$ je tedy lineární kombinací ostatních řádků.

Předpokládejme, že například řádek $A_\circ^{i_j}$ je lineární kombinací ostatních řádků, tedy

$$A_\circ^{i_j} = c_1 A_\circ^{i_1} + \dots + c_{j-1} A_\circ^{i_{j-1}} + c_{j+1} A_\circ^{i_{j+1}} + \dots + c_k A_\circ^{i_k}.$$

Potom

$$c_1 A_\circ^{i_1} + \dots + c_{j-1} A_\circ^{i_{j-1}} - A_\circ^{i_j} + c_{j+1} A_\circ^{i_{j+1}} + \dots + c_k A_\circ^{i_k} = 0_\circ$$

a zároveň $c_j = -1$. Takže množina řádků $\{A_\circ^{i_1}, A_\circ^{i_2}, \dots, A_\circ^{i_k}\}$ je lineárně závislá. □

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nechť

$$\begin{aligned} & c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & \quad = \begin{pmatrix} c_2 + c_3 & c_1 + 2c_2 & 2c_1 + 3c_2 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Takže

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 \quad &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

a to je možné jedině v případě, že $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (vyřešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých c_1, c_2, c_3 a získáme jediné, nulové řešení).

Množina řádků matice A je tedy lineárně nezávislá. □

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nechť

$$\begin{aligned} & c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ & \quad = \begin{pmatrix} c_2 + 2c_3 & c_1 + 2c_2 + c_3 & 2c_1 + 3c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soustava

$$\begin{aligned} c_2 + 2c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 + \ c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 \quad &= 0 \end{aligned}$$

má kromě nulového i nenulová řešení (například $c_1 = 3$, $c_2 = -2$, $c_3 = 1$). Množina řádků matice A je tedy lineárně závislá. □

Příklad. (1) Množina řádků jednotkové matice je lineárně nezávislá. Ověřte.

(2) Množina řádků, z nichž aspoň jeden je nulový, je lineárně závislá. Ověřte.

(3) Jednoprvková množina obsahující řádek $A^i_\circ$ je lineárně nezávislá, jestliže z $cA^i_\circ = 0_\circ$ plyne $c = 0$. Tedy, jednoprvková množina obsahující jeden řádek je lineárně nezávislá, jestliže ten řádek je nenulový, a je lineárně závislá, jestliže ten řádek je nulový.

(4) Množina obsahující jen řádky $A^{i_1}_\circ, A^{i_2}_\circ$ je lineárně závislá právě tehdy, když jeden z řádků je násobkem druhého z řádků (existuje $c \in P$ takové, že $A^{i_1}_\circ = cA^{i_2}_\circ$).

(5) Prázdná množina řádků je lineárně nezávislá. □

1.5.2. Hodnost matice

Definice 1.5.2. *Hodnost* matice je maximální počet prvků lineárně nezávislé množiny jejích řádků. Hodnost matice A značíme $\operatorname{rank} A$.

Mějme matici A typu $m \times n$ s řádky $A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ$. Vezmeme všechny možné množiny těchto řádků, čili prázdnou množinu $\emptyset$, jednoprvkové množiny $\{A^1_\circ\}, \{A^2_\circ\}, \dots, \{A^m_\circ\}$, dvouprvkové množiny $\{A^1_\circ, A^2_\circ\}, \dots, \{A^{m-1}_\circ, A^m_\circ\}$, $\dots$, až množinu $\{A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ\}$. Z těchto množin vybereme ty, které jsou lineárně nezávislé. U kažné z nich si poznamenáme počet prvků a maximální z těchto počtů je hodnost matice A.

Hodnost matice s m řádky je tedy jedno z čísel $0, 1, \dots, m$.

Příklad. (1) Hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je rovna 3. Ověřte.

(2) Hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je rovna 2. Ověřte.

(3) Hodnost nulové matice je rovna 0, hodnost nenulové matice je kladná.

(4) Hodnost diagonální matice je rovna počtu jejích nenulových řádků. □

Cvičení. Spočtěte hodnosti matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

□

Tvrzení 1.5.2. *Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.*

Důkaz. Buď A matice ve schodovitém tvaru, která má m řádků, z nichž p je nenulových. Množina všech nenulových řádků je lineárně nezávislá (cvičení), takže $\operatorname{rank} A \geq p$. Jestliže $m = p$, hodnost větší být nemůže. Jestliže $m > p$, pak každá množina s více než p řádky obsahuje aspoň jeden nulový řádek, a je tedy lineárně závislá, takže i v tomto případě $\operatorname{rank} A = p$. □

Podle následujícího tvrzení je množina řádků lineárně nezávislá právě tehdy, když je lineárně nezávislá množina řádků vzniklá provedením řádkové nebo sloupkové elementární úpravy původní množiny řádků.

Tvrzení 1.5.3. *Buďte $A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ$ řádky. Nechť $B^1_\circ, B^2_\circ, \dots, B^m_\circ$ jsou řádky, které z řádků $A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ$ vzniknou provedením jedné řádkové nebo sloupkové elementární úpravy. Potom množina řádků $\{A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ\}$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když množina řádků $\{B^1_\circ, B^2_\circ, \dots, B^m_\circ\}$ je lineárně nezávislá.*

Důkaz. (1) Nechť došlo k přičtení c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku, kde $i \neq j$. Tedy, $B^i_\circ = A^i_\circ + cA^j_\circ$ a $B^k_\circ = A^k_\circ$ pro $k \neq i$.

Předpokládejme, že $\{A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ\}$ je lineárně nezávislá. Buďte $c_1, \dots, c_m \in P$ takové, že $c_1 B^1_\circ + \dots + c_m B^m_\circ = 0_\circ$. Pak

$$
\begin{aligned}
0_\circ &= c_1 B^1_\circ + \dots + c_m B^m_\circ = \\
&= c_1 A^1_\circ + \dots + c_i(A^i_\circ + cA^j_\circ) + \dots + c_j A^j_\circ + \ldots + c_m A^m_\circ = \\
&= c_1 A^1_\circ + \dots + c_i A^i_\circ + \dots + (c_j + cc_i) A^j_\circ + \ldots + c_m A^m_\circ.
\end{aligned}
$$

Z lineární nezávislosti množiny $\{A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ\}$ vyplývá, že všechny koeficienty poslední lineární kombinace jsou nulové, tj. $c_1 = \dots = c_i = \dots = cc_i + c_j = \dots = c_m = 0$. Z toho dostaneme, že i $c_j = 0$, a množina $\{B^1_\circ, B^2_\circ, \dots, B^m_\circ\}$ je lineárně nezávislá.

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, neboť řádky $A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ$ vzniknou z řádků $B^1_\circ, B^2_\circ, \dots, B^m_\circ$ inverzní úpravou, která je stejného typu.

(2) Nechť došlo k přičtení c-násobku j-tého sloupku k i-tému sloupku, kde $i \neq j$. Pak pro každé $k \in \{1, \dots, m\}$ je $B^k_i = A^k_i + cA^k_j$ a $B^k_l = A^k_l$ pro $l \neq i$. Tedy $B^k_\circ = \begin{pmatrix} A^k_1 & \dots & A^k_i + cA^k_j & \dots & A^k_j & \dots & A^k_n \end{pmatrix}$.

Předpokládejme, že $\{A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ\}$ je lineárně nezávislá. Buďte $c_1, \dots, c_m \in P$ takové, že $c_1 B^1_\circ + \dots + c_m B^m_\circ = 0_\circ$. Takže

$$
\begin{aligned}
&c_1 B^1_\circ + \dots + c_m B^m_\circ = \\
&= \begin{pmatrix} \sum_k c_k A^k_1 & \dots & \sum_k c_k (A^k_i + cA^k_j) & \dots & \sum_k c_k A^k_j & \dots & \sum_k c_k A^k_n \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \sum_k c_k A^k_1 & \dots & \sum_k c_k A^k_i + c \sum_k c_k A^k_j & \dots & \sum_k c_k A^k_j & \dots & \sum_k c_k A^k_n \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

a z toho dostaneme

$$
\sum_k c_k A^k_1 = \dots = \sum_k c_k A^k_i = \dots = \sum_k c_k A^k_j = \dots = \sum_k c_k A^k_n = 0.
$$

Pak

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \sum_k c_k A^k_1 & \sum_k c_k A^k_2 & \dots & \sum_k c_k A^k_n \end{pmatrix} = \sum_k c_k \begin{pmatrix} A^k_1 & A^k_2 & \dots & A^k_n \end{pmatrix} = \\
&= \sum_k c_k A^k_\circ = c_1 A^1_\circ + \dots + c_m A^m_\circ = 0_\circ
\end{aligned}
$$

a z lineární nezávislosti množiny $\{A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ\}$ dostaneme $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$. Množina $\{B^1_\circ, B^2_\circ, \dots, B^m_\circ\}$ je tedy lineárně nezávislá.

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, neboť řádky $A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ$ vzniknou z řádků $B^1_\circ, B^2_\circ, \dots, B^m_\circ$ inverzní úpravou, která je stejného typu.

Pro ostatní úpravy je důkaz obdobný a ponecháme ho jako cvičení. □

Důsledek. *(1) Hodnost matice je rovna hodnosti matice z ní vzniklé provedením elementární úpravy.*

(2) Provedení konečně mnoha elementárních úprav nemění hodnost.

(3) Vynásobení konečně mnoha elementárními maticemi zleva nemění hodnost.

(4) Vynásobení konečně mnoha elementárními maticemi zprava nemění hodnost.

(5) Ekvivalentní matice mají stejnou hodnost.

(6) Hodnost matice je rovna počtu nenulových řádků ekvivalentní matice ve schodovitém tvaru.

(7) Hodnost matice je rovna počtu nenulových řádků (sloupků) ekvivalentní matice v Gaussově kanonickém tvaru.

(8) Maximální počet prvků lineárně nezávislých množin sloupků matice je roven maximálnímu počtu prvků lineárně nezávislých množin jejích řádků, tj. hodnosti matice.

(9) $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T$.

Příklad. Spočítejme hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Takže $\operatorname{rank} A = 3$. □

Příklad. Spočítejme hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Takže $\operatorname{rank} A = 2$. □

Definice 1.5.3. Čtvercová matice je *regulární*, jestliže její hodnost je rovna počtu jejích řádků (tedy množina všech jejích řádků je lineárně nezávislá). Čtvercová matice je *singulární*, jestliže není regulární.

Příklad. (1) Všechny jednotkové matice jsou regulární.

(2) Všechny elementární matice jsou regulární.

(3) Všechny čtvercové matice s aspoň jedním nulovým řádkem jsou singulární. □

Tvrzení 1.5.4. *Matice je regulární právě tehdy, když je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.*

Důkaz. Cvičení. □

Důsledek. *(1) Matice je invertibilní právě tehdy, když je regulární.*

(2) Regulární matice je součinem konečně mnoha elementárních matic.

(3) Součin regulárních matic je regulární matice.

(4) Vynásobení regulární maticí zleva nemění hodnost.

(5) Vynásobení regulární maticí zprava nemění hodnost.

Tvrzení 1.5.5. *Buďte A, B čtvercové matice stejného typu. Obě matice A, B jsou regulární právě tehdy, když matice AB je regulární.*

Důkaz. „$\Rightarrow$" Tato implikace je součástí předchozího Důsledku.

„$\Leftarrow$" Dokážeme, že je-li aspoň jedna z matic A, B singulární, pak AB je singulární. Nechť A je singulární. Ekvivalentní matice $S = Q_k \cdots Q_1 A$, kde $Q_1, \ldots, Q_k$ jsou elementární matice, ve schodovitém tvaru, má nulový řádek. Potom matice SB má také nulový řádek, je tedy singulární a řádkově ekvivalentní matice $AB = Q_1^{-1} \cdots Q_k^{-1} SB$, která má stejnou hodnost, je také singulární.

Pro B singulární je důkaz analogický a ponecháme ho jako cvičení. □

Tvrzení 1.5.6. *Buďte A matice typu $m \times n$ a B matice typu $n \times p$. Potom* $\operatorname{rank} AB \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$.

Důkaz. Matici A převedeme pomocí řádkových elementárních úprav na schodovitý tvar $S_A = Q_k \cdots Q_1 A$ a matici B převedeme pomocí sloupkových elementárních úprav na tvar $S_B = BP_1 \cdots P_l$ takový, že S_B^{T} je ve schodovitém tvaru.

Potom $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} Q_1^{-1} \cdots Q_k^{-1} S_A S_B P_l^{-1} \cdots P_1^{-1} = \operatorname{rank} S_A S_B$, přičemž matice $S_A S_B$ má minimálně tolik nulových řádků, kolik jich má matice S_A, a minimálně tolik nulových sloupků, kolik jich má matice S_B. Tedy $\operatorname{rank} S_A S_B \leq \operatorname{rank} S_A = \operatorname{rank} A$ a $\operatorname{rank} S_A S_B \leq \operatorname{rank} S_B = \operatorname{rank} B$. □

Cvičení. Co se dá říct o $\operatorname{rank}(A + B)$? □