12. přednáška, 19. 12. 2023

**Tvrzení 9.3.1.** *Každý konečněrozměrný vektorový prostor má bázi.*

*Důkaz.* Podle definice konečněrozměrný vektorový prostor má konečnou množinu generátorů. Ukážeme, že v ní existuje lineárně nezávislá podmnožina, která generuje tentýž vektorový prostor a je tedy jeho báze. Buď $\{v_1, \dots, v_n\}$ množina generátorů vektorového prostoru. Z této množiny postupně pro $i = 1, \dots, n$ vylučme vektor $v_i$, je-li lineární kombinací předchozích. Tedy $v_1$ vyloučíme, pokud $v_1 = 0$. Vektory, které nevyloučíme, označme $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$. Je-li prvek množiny generátorů lineární kombinací ostatních prvků této množiny, po jeho vyloučení z této množiny zůstane opět množina generátorů stejného vektorového prostoru (ověřte). Proto vektory $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$ generují tentýž vektorový prostor.

Díky uvedenému postupu žádný z vektorů $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$ není lineární kombinací předchozích a množina $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_m}\}$ je lineárně nezávislá. □

I nulový prostor $\{0\}$ má bázi. Je jí $\emptyset$, jelikož je lineárně nezávislá a $[\![\emptyset]\!] = \{0\}$.

**Tvrzení 9.3.2.** *Všechny báze jednoho konečněrozměrného vektorového prostoru mají stejný počet prvků.*

*Důkaz.* Buďte $(v_1, \dots, v_n)$ a $(u_1, \dots, u_m)$ báze vektorového prostoru $V$. Jelikož vektory $v_1, \dots, v_n$ generují $V$ a $\{u_1, \dots, u_m\}$ je lineárně nezávislá množina, podle Tvrzení 9.2.5 $n \geq m$. Obdobně dostaneme, že $m \geq n$. Takže $n = m$. □

**Definice 9.3.2.** *Dimenze* vektorového prostoru je počet vektorů (libovolné) jeho báze. Vektorový prostor $V$ dimenze $n$ je $n$-*rozměrný*, zapisujeme $\dim V = n$. Nulový vektorový prostor $\{0\}$ je $0$-*rozměrný*.

**Příklad.** (1) Vektorový prostor $P^n$ nad polem $P$ je $n$-rozměrný. Jednou z bází je $n$-tice (*kanonická báze*) $((1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1))$.

(2) Vektorový prostor $\mathbb{C}$ nad polem $\mathbb{R}$ je dvojrozměrný. Jednou z bází je dvojice $(1, i)$. Vektorový prostor $\mathbb{C}$ nad polem $\mathbb{C}$ je jednorozměrný, jednu z bází tvoří vektor 1. Vidíme, že dva vektorové prostory mohou mít *různé* dimenze, přestože mají *stejné* množiny vektorů.

(3) Vektorový prostor $\mathbb{C}^n$ nad polem $\mathbb{R}$ je $2n$-rozměrný. Jednou z bází je $2n$-tice

$$\begin{aligned}&((1,0,\dots,0),(i,0,\dots,0),\\&\ (0,1,0,\dots,0),(0,i,0,\dots,0),\\&\ \dots,\\&\ (0,\dots,0,1),(0,\dots,0,i)).\end{aligned}$$ □

**Definice 9.3.3.** (1) *Minimální množina generátorů* vektorového prostoru $V$ je množina generátorů prostoru $V$, jejíž žádná vlastní podmnožina negeneruje $V$.

(2) *Maximální lineárně nezávislá množina vektorů* vektorového prostoru $V$ je lineárně nezávislá množina vektorů z $V$, která není vlastní podmnožinou žádné lineárně nezávislé množiny.

**Tvrzení 9.3.3.** *Buďte $v_1, \dots, v_n \in V$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

*(1) $\{v_1, \dots, v_n\}$ je báze $V$;*
*(2) $\{v_1, \dots, v_n\}$ je minimální množina generátorů $V$;*

*(3) $\{v_1, \dots, v_n\}$ je maximální lineárně nezávislá množina vektorů $V$.*

*Důkaz.* (1) $\Rightarrow$ (2): Je-li $\{v_1, \dots, v_n\}$ báze, je to množina generátorů a žádný z nich není lineární kombinací ostatních. Tudíž žádná její vlastní podmnožina negeneruje $V$ a $\{v_1, \dots, v_n\}$ je minimální množina generátorů.

(2) $\Rightarrow$ (1): $\{v_1, \dots, v_n\}$ je množina generátorů. Jelikož je minimální, žádný z jejích vektorů není lineární kombinací ostatních, takže je navíc lineárně nezávislá, čili báze.

(1) $\Rightarrow$ (3): Je-li $\{v_1, \dots, v_n\}$ báze, je lineárně nezávislá a každý vektor z $V$ je lineární kombinací vektorů báze. Tudíž každá vlastní nadmnožina je lineárně závislá a tato je tedy maximální.

(3) $\Rightarrow$ (1): Množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá. Jelikož je maximální, po přidání libovolného vektoru z $V$, dostaneme lineárně závislou množinu a ten přidaný vektor (ty původní to být nemohou) je lineární kombinací předchozích, takže $\{v_1, \dots, v_n\}$ je navíc množina generátorů, čili báze. $\square$

Tvrzení poskytuje dvě alternativní definice báze, které se často používají. Má také důležité důsledky.

**Důsledek.** *Buď $V$ $n$-rozměrný vektorový prostor. Pak*

*(1) libovolná jeho $n$-prvková lineárně nezávislá podmnožina tvoří bázi $V$;*
*(2) libovolných $n$ jeho generátorů tvoří bázi $V$.*

*Důkaz.* (1) Prostor $V$ má $n$-prvkovou množinu generátorů, takže podle Tvrzení 9.2.5 každá $n$-prvková lineárně nezávislá podmnožina je maximální, tedy báze.

(2) V prostoru $V$ existuje $n$-prvková lineárně nezávislá množina, takže podle Tvrzení 9.2.5 každá $n$-prvková množina generátorů je minimální, tedy báze. $\square$

**Důsledek.** *Buď $\{v_1, \dots, v_k\}$ lineárně nezávislá podmnožina $n$-rozměrného vektorového prostoru $V$. Pak ji lze doplnit do báze $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$.*

*Důkaz.* V případě, že $v_1, \dots, v_k$ generují $V$, tvoří bázi. Jinak existuje vektor $v_{k+1} \in V$, který není lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_k$, načež množina $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ je lineárně nezávislá, protože $v_{k+1}$ není lineární kombinací předchozích vektorů.

Po $n-k$ opakováních téže úvahy získáme $n$-prvkovou lineárně nezávislou množinu $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\}$, která je bází podle předchozího důsledku. $\square$

## 9.4. Souřadnice

**Tvrzení 9.4.1.** *Buď $(e_1, \dots, e_n)$ báze vektorového prostoru $V$. Pak pro každé $v \in V$ existuje právě jedna $n$-tice skalárů $(x^1, \dots, x^n)$ taková, že $v = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$.*

*Důkaz.* Buď $v \in V$. Jelikož $e_1, \dots, e_n$ generují $V$, existují $x^1, \dots, x^n \in P$ takové, že $v = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$. Jsou-li $y^1, \dots, y^n$ libovolná taková, že $v = y^1 e_1 + \dots + y^n e_n$, pak

$$\begin{aligned} 0 = v - v &= (x^1 e_1 + \dots + x^n e_n) - (y^1 e_1 + \dots + y^n e_n) = \\ &= (x^1 - y^1) e_1 + \dots + (x^n - y^n) e_n. \end{aligned}$$

Z lineární nezávislosti množiny $\{e_1, \dots, e_n\}$ plyne $x^1 - y^1 = \dots = x^n - y^n = 0$, a tedy $x^1 = y^1, \dots, x^n = y^n$. $\square$

**Cvičení.** Zformulujte a dokažte obrácené tvrzení. $\square$

**Definice 9.4.1.** Skaláry $x^1, \dots, x^n$ z předchozího tvrzení jsou *souřadnice* vektoru $v$ vzhledem k bázi $(e_1, \dots, e_n)$.

Souřadnice budeme zapisovat buď jako prvky pole $x^1, \dots, x^n$ nebo jako uspořádanou $n$-tici $x = (x^1, \dots, x^n)$ nebo jako matici typu $n \times 1$

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

**Příklad.** (1) Souřadnice vektoru $2 \in \mathbb{R}$ vzhledem k bázi $(6)$ je $\frac{1}{3}$, protože $2 = \frac{1}{3} \cdot 6$.

(2) Souřadnice vektoru $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ v kanonické bázi jsou $x, y, z$, protože $(x, y, z) = x \cdot (1,0,0) + y \cdot (0,1,0) + z \cdot (0,0,1)$.

(3) Souřadnice vektoru $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ v bázi $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ jsou $x-y, y-z, z$, protože $(x, y, z) = (x-y) \cdot (1,0,0) + (y-z) \cdot (1,1,0) + z \cdot (1,1,1)$.

(4) Souřadnice vektoru $z = a + bi \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ vzhledem k bázi $(1, i)$ jsou $a, b$, protože $z = a \cdot 1 + b \cdot i$.

Souřadnice vektoru $z = a + bi \in \mathbb{C}(\mathbb{C})$ vzhledem k bázi $(1)$ je $z$, protože $z = z \cdot 1$. □

Souřadnice vektoru závisí na volbě báze. Jeden vektor má v různých bázích různé souřadnice.

Buďte $V$ vektorový prostor, $v \in V$. Buďte $e = (e_1, \dots, e_n)$ a $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ báze $V$, $e$ nazvěme *stará báze*, $e'$ nazvěme *nová báze*. Souřadnice vektoru $v$ vzhledem ke staré bázi označme $x = (x^1, \dots, x^n)$ a říkejme jim *staré souřadnice*. Souřadnice vektoru $v$ vzhledem k nové bázi označme $x' = (x'^1, \dots, x'^n)$ a říkejme jim *nové souřadnice*. Platí tedy $v = \sum_i x^i e_i = \sum_i x'^i e'_i$.

**Definice 9.4.2.** Matice, jejíž sloupky jsou tvořeny novými souřadnicemi starých bázových vektorů, je *matice přechodu* od staré báze k nové bázi.

Matici přechodu od báze $\alpha$ k bázi $\beta$ budeme značit $Q_{\alpha\beta}$.

Zobrazení

$$\delta(i, j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{je-li } i = j, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \qquad \text{je Kroneckerovo delta.}$$

**Tvrzení 9.4.2.** *Matice přechodu je regulární.*

*Důkaz.* Buďte $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ a $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ báze jednoho vektorového prostoru. Označme $Q_{\alpha\beta} = (a^j_i)$ matici přechodu od báze $\alpha$ k bázi $\beta$ a $Q_{\beta\alpha} = (b^j_i)$ matici přechodu od báze $\beta$ k bázi $\alpha$. Tedy, $(a^1_i, a^2_i, \dots, a^n_i)$ jsou souřadnice vektoru $\alpha_i$ vzhledem k bázi $\beta$, $(b^1_i, b^2_i, \dots, b^n_i)$ jsou souřadnice vektoru $\beta_i$ vzhledem k bázi $\alpha$ a

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} a^j_i \beta_j \qquad \text{a} \qquad \beta_i = \sum_{j=1}^{n} b^j_i \alpha_j \quad \text{pro každé} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \sum_{j=1}^{n} a_i^j \beta_j = \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_i^j \left( \sum_{k=1}^{n} b_j^k \alpha_k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} a_i^j b_j^k \right) \alpha_k,\end{aligned}$$

čili

$$\left( \sum_{j=1}^{n} a_i^j b_j^1, \quad \sum_{j=1}^{n} a_i^j b_j^2, \quad \dots, \quad \sum_{j=1}^{n} a_i^j b_j^n \right)$$

jsou souřadnice vektoru $\alpha_i$ vzhledem k bázi $\alpha$. Tedy,

$$\sum_{j=1}^{n} a_i^j b_j^k = \delta_k^i = \begin{cases} 1 & \text{je-li } i = k, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Ovšem

$$\sum_{j=1}^{n} a_i^j b_j^k = (Q_{\beta\alpha} Q_{\alpha\beta})_i^k$$

je v $k$-tém řádku a $i$-tém sloupku součinu $Q_{\beta\alpha} Q_{\alpha\beta}$, takže $Q_{\beta\alpha} Q_{\alpha\beta} = E$, proto matice $Q_{\beta\alpha}$ a $Q_{\alpha\beta}$ jsou vzájemně inverzní a tedy obě regulární. □

**Tvrzení 9.4.3.** *Buď $Q_{ee'}$ matice přechodu od staré báze $e$ k nové bázi $e'$ a buďte $x$ a $x'$ staré a nové souřadnice jednoho vektoru. Potom*

$$x' = Q_{ee'} \cdot x.$$

*Důkaz.* Buď $Q_{ee'} = (q_j^i)$ matice přechodu od staré báze $e$ k nové bázi $e'$. Tedy

$$e_i = \sum_j q_i^j e'_j.$$

Buď $v = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n \in V$. Potom

$$\begin{aligned}v &= x^1 \sum\nolimits_j q_1^j e'_j + \dots + x^n \sum\nolimits_j q_n^j e'_j = \\ &= x^1 (q_1^1 e'_1 + q_1^2 e'_2 + \dots + q_1^n e'_n) + \dots + x^n (q_n^1 e'_1 + q_2^2 e'_2 + \dots + q_n^n e'_n) = \\ &= \left( \sum\nolimits_j q_j^1 x^j \right) e'_1 + \left( \sum\nolimits_j q_j^2 x^j \right) e'_2 + \dots + \left( \sum\nolimits_j q_j^n x^j \right) e'_n.\end{aligned}$$

Tedy

$$x'^i = \sum_j q_j^i x^j \qquad \text{a} \qquad x' = Q_{ee'} \cdot x.$$ □

**Příklad.** (1) Mějme $\mathbb{R}$, starou bázi $e = (6)$ a novou bázi $e' = (1)$. Pro $v = 2$ je $x = (\frac{1}{3})$ a $x' = (2)$.

Matice přechodu od staré báze $e$ k nové bázi $e'$ je

$$Q_{ee'} = \left(6\right).$$

A skutečně

$$x' = (6) \cdot (\tfrac{1}{3}) = (2).$$

(2) Mějme $\mathbb{R}^2$, starou bázi $e = ((1,-1),(1,1))$ a novou bázi $e' = ((0,2),(2,1))$. Pro $v = (2,0)$ je $x = (1,1)$ a $x' = (-\frac{1}{2}, 1)$.

Matice přechodu od staré báze $e$ k nové bázi $e'$ je

$$Q_{ee'} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

A skutečně

$$x' = Q_{ee'} \cdot x = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

**Tvrzení 9.4.4.** *Buďte $V$ vektorový prostor nad polem $P$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ jeho báze, $u, v \in V$, $p \in P$, $x = (x^1, \dots, x^n)$ souřadnice vektoru $u$ a $y = (y^1, \dots, y^n)$ souřadnice vektoru $v$. Pak $x + y = (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n)$ jsou souřadnice vektoru $u + v$ a $px = (px^1, \dots, px^n)$ jsou souřadnice vektoru $pu$.*

*Důkaz.* Cvičení. □

## 9.5. Orientace vektorového prostoru

**Definice 9.5.1.** Buďte $\alpha$, $\beta$ báze jednoho vektorového prostoru. Báze $\alpha$ má stejnou *orientaci* jako báze $\beta$, jestliže $\det Q_{\alpha\beta} > 0$.

Relace

$$\alpha \sim \beta \quad \text{právě tehdy, když} \quad \alpha \text{ má stejnou orientaci jako } \beta$$

je relace ekvivalence. (Cvičení.) Tato relace ekvivalence rozděluje množinu všech bází jednoho vektorového prostoru do dvou disjunktních tříd.

**Definice 9.5.2.** Prohlásíme-li některou z bází vektorového prostoru, a společně s ní i každou bázi se stejnou orientací, za *kladnou* (nebo *kladně orientovanou*), určíme tím *orientaci* vektorového prostoru a vektorový prostor je potom *orientovaný*. Báze, které nejsou kladné, jsou *záporné* (nebo *záporně orientované*).

**Příklad.** Kanonická báze prostoru $P^n$ je obvykle uvažována jako kladná. □

## 9.6. Přímý součet vektorových prostorů

**Definice 9.6.1.** Buďte $V_1, \dots, V_n$ vektorové prostory nad polem $P$. Na kartézském součinu $V_1 \times \cdots \times V_n$ zaveďme sčítání a násobení skalárem předpisem

$$(u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n),$$
$$p(u_1, \dots, u_n) = (pu_1, \dots, pu_n)$$

pro libovolné $(u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$ a $p \in P$.
Na $V_1 \times \cdots \times V_n$ tak dostaneme strukturu vektorového prostoru nad polem $P$, který se značí $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ a je to *přímý součet* vektorových prostorů $V_1, \dots, V_n$.

**Cvičení.** Ověřte, že $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ je vektorový prostor. □

**Tvrzení 9.6.1.** *Buďte* $V_1, \dots, V_n$ *konečněrozměrné vektorové prostory. Pak*

$$\dim(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) = \dim V_1 + \cdots + \dim V_n.$$

*Důkaz.* Pro každé $i$ nechť $(e^i_1, \dots, e^i_{m_i})$ je báze $V_i$. Potom

$$\begin{aligned}
&((e^1_1, 0, \dots, 0), \dots, (e^1_{m_1}, 0, \dots, 0),\\
&\ (0, e^2_1, 0, \dots, 0), \dots, (0, e^2_{m_2}, 0, \dots, 0),\\
&\ \dots,\\
&\ (0, \dots, 0, e^n_1), \dots, (0, \dots, 0, e^n_{m_n}))
\end{aligned}$$

je báze $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ (cvičení). □

**Příklad.** Buď $V_1 = \mathbb{R}$ a $V_2 = \mathbb{R}^2$. Potom $V_1 \times V_2$ je množina $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ uspořádaných dvojic $(x, y)$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, tedy $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \{(x, (y_1, y_2)) | \, x \in \mathbb{R}, (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2\}$. Například

$$\begin{aligned}
&(1, (2, 3)) + (2, (1, -1)) = (1 + 2, (2, 3) + (1, -1)) = (3, (3, 2)),\\
&3 \cdot (2, (1, 4)) = (3 \cdot 2, 3 \cdot (1, 4)) = (6, (3, 12)).
\end{aligned}$$

Buď $e^1 = (1)$ báze $\mathbb{R}$ a buď $e^2 = (e^2_1, e^2_2) = ((1, 0), (0, 1))$ báze $\mathbb{R}^2$. Potom trojice

$$((e^1, 0), (0, e^2_1), (0, e^2_2)) = ((1, (0, 0)), (0, (1, 0)), (0, (0, 1)))$$

je báze $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$ a $\dim(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2) = 3 = \dim \mathbb{R} + \dim \mathbb{R}^2 = 1 + 2$. □