11. přednáška, 12. 12. 2023

Tvrzení 9.2.1. *Množina vektorů $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně závislá právě tehdy, když aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních, tj. právě když existuje index i takový, že vektor v_i je lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Předpokládejme, že množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně závislá, tedy že existují koeficienty $a^1, \dots, a^n$ takové, že $a^1 v_1 + \dots + a^i v_i + \dots + a^n v_n = 0$ a aspoň jeden z nich je nenulový (například a^i). Potom

$$v_i = -\frac{a^1}{a^i} v_1 - \dots - \frac{a^{i-1}}{a^i} v_{i-1} - \frac{a^{i+1}}{a^i} v_{i+1} - \dots - \frac{a^n}{a^i} v_n,$$

a vektor v_i je tedy lineární kombinací ostatních.

„$\Leftarrow$“ Nechť vektor v_i je lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$, tedy existují koeficienty $a^1, \dots, a^{i-1}, a^{i+1}, \dots, a^n$ takové, že

$$v_i = a^1 v_1 + \dots + a^{i-1} v_{i-1} + a^{i+1} v_{i+1} + \dots + a^n v_n.$$

Potom

$$a^1 v_1 + \dots + a^{i-1} v_{i-1} - v_i + a^{i+1} v_{i+1} + \dots + a^n v_n = 0$$

s nenulovým koeficientem (-1) u vektoru v_i. Tedy, množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně závislá. □

Tvrzení 9.2.2. *Množina vektorů $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně závislá právě tehdy, když aspoň jeden z nich je lineární kombinací předchozích, tj. právě když existuje index i takový, že vektor v_i je lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_{i-1}$.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Postupujeme jako v důkazu předchozího tvrzení, jen nenulový koeficient a^i vybereme s nejvyšším možným indexem. To znamená, že $a^{i+1} = \dots = a^n = 0$ a zbytek je zřejmý.

Jako cvičení rozeberte podrobně případ $i = 1$, kdy bude množina předcházejících vektorů prázdná.

„$\Leftarrow$“ Tvrzení je speciálním případem předchozího. □

Definice 9.2.6. *Elementární úprava* n-tice vektorů $(v_1, \dots, v_n)$ z vektorového prostoru V nad polem P je:

(i) vynásobení vektoru nenulovým skalárem c;
(ii) přičtení c-násobku j-tého vektoru k i-tému vektoru, kde $i \neq j$;
(iii) výměna i-tého vektoru s j-tým vektorem.

Při tom vznikají po řadě n-tice

$$(v_1, \dots, v_{i-1}, cv_i, v_{i+1}, \dots, v_n),$$
$$(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + cv_j, v_{i+1}, \dots, v_j, \dots, v_n),$$
$$(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n).$$

Ke každé z těchto úprav existuje úprava inverzní, která je rovněž elementární a stejného typu (ověřte).

Definice 9.2.7. Dvě n-tice vektorů jsou *ekvivalentní*, jestliže jedna vznikne z druhé konečnou posloupností elementárních úprav.

Cvičení. Ukažte, že právě zavedená relace mezi n-ticemi vektorů je reflexivní, symetrická a tranzitivní. □

Příklad. Mějme matici typu $m \times n$ nad polem P. Její řádky jsou uspořádané n-tice prvků pole P, tj. vektory z prostoru P^n. Celá matice je pak m-tice takových n-tic, tedy m-ticí vektorů z prostoru P^n. Elementární úpravy této m-tice vektorů jsou právě elementární řádkové úpravy dané matice. $\square$

Tvrzení 9.2.3. *Nechť n-tice $(u_1, \dots, u_n)$ je ekvivalentní s n-ticí $(v_1, \dots, v_n)$. Pak vektory $u_1, \dots, u_n$ generují V právě tehdy, když vektory $v_1, \dots, v_n$ generují V.*

Důkaz. Nechť lze získat n-tici $(v_1, \dots, v_n)$ z n-tice $(u_1, \dots, u_n)$ jednou z elementárních úprav, vybereme si úpravu druhého typu, tedy $v_i = u_i + cu_j$ a $v_k = u_k$ pro $k \neq i$.

Předpokládejme, že $v_1, \dots, v_n$ generují V. Pro libovolný vektor $w \in V$ tedy existují koeficienty $p^1, \dots, p^n$ takové, že $w = p^1 v_1 + \dots + p^n v_n$. Pak

$$\begin{aligned} w &= p^1 u_1 + \dots + p^i (u_i + cu_j) + \dots + p^j u_j + \dots + p^n u_n = \\ &= p^1 u_1 + \dots + p^i u_i + \dots + (p^j + cp^i) u_j + \dots + p^n u_n \end{aligned}$$

je lineární kombinace vektorů $u_1, \dots, u_n$.

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, neboť n-tice $(u_1, \dots, u_n)$ vzniká z n-tice $(v_1, \dots, v_n)$ inverzní úpravou, která je stejného typu.

Pro ostatní úpravy obdobně a výsledek platí i pro libovolnou konečnou posloupnost elementárních úprav. $\square$

Tvrzení 9.2.4. *Nechť n-tice $(u_1, \dots, u_n)$ je ekvivalentní s n-ticí $(v_1, \dots, v_n)$. Pak množina $\{u_1, \dots, u_n\}$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá.*

Důkaz. Nechť lze získat n-tici $(v_1, \dots, v_n)$ z n-tice $(u_1, \dots, u_n)$ jednou z elementárních úprav, vybereme si úpravu druhého typu, tedy $v_i = u_i + cu_j$ a $v_k = u_k$ pro $k \neq i$.

Předpokládejme, že $\{u_1, \dots, u_n\}$ je lineárně nezávislá. Buďte $x^1, \dots, x^n \in P$ takové, že $x^1 v_1 + \dots + x^n v_n = 0$. Pak

$$\begin{aligned} 0 &= x^1 v_1 + \dots + x^n v_n = x^1 u_1 + \dots + x^i (u_i + cu_j) + \dots + x^j u_j + \dots + x^n u_n = \\ &= x^1 u_1 + \dots + x^i u_i + \dots + (x^j + cx^i) u_j + \dots + x^n u_n. \end{aligned}$$

Z lineární nezávislosti množiny $\{u_1, \dots, u_n\}$ vyplývá, že všechny koeficienty poslední lineární kombinace jsou nulové, tj. $x^1 = \dots = x^i = \dots = x^j + cx^i = \dots = x^n = 0$. Z toho dostaneme, že i $x^j = 0$.

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, neboť n-tice $(u_1, \dots, u_n)$ vzniká z n-tice $(v_1, \dots, v_n)$ inverzní úpravou, která je stejného typu.

Pro ostatní úpravy obdobně a výsledek platí i pro libovolnou konečnou posloupnost elementárních úprav. $\square$

Tvrzení 9.2.5. *Nechť vektory $v_1, \dots, v_n$ generují prostor V a $\{u_1, \dots, u_m\} \subset V$ je lineárně nezávislá. Pak $m \leq n$.*

Důkaz. Každý z vektorů $u_1, \dots, u_m$ je lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_n$, takže pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ existují koeficienty $a_i^1, \dots, a_i^n$ takové, že $u_i = a_i^1 v_1 + \dots + a_i^n v_n$. Matici

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & \\ a_m^1 & \dots & a_m^n \end{pmatrix}$$

upravme pomocí řádkových elementárních úprav na matici A' ve schodovitém tvaru. Provedeme-li stejné elementární úpravy s m-ticí $u_1, \dots, u_m$, dostaneme ekvivalentní

m-tici $u'_1, \dots, u'_m$. Lineární kombinace vektorů $v_1, \dots, v_n$ s koeficienty z jednotlivých řádků matice A' jsou rovny právě vektorům $u'_1, \dots, u'_m$. Z lineární nezávislosti množiny $\{u_1, \dots, u_m\}$ plyne lineární nezávislost množiny $\{u'_1, \dots, u'_m\}$ a také lineární nezávislost, tedy i nenulovost řádků matice A'. Jelikož A' je ve schodovitém tvaru a všechny řádky má nenulové, nemá více řádků než sloupků, tedy $m \leq n$.

Tvrzení je také součástí Tvrzení 9.2.7. □

Lemma 9.2.6 (Lemma o výměně). *Buďte $v_1, \dots, v_n \in V$ a $u = a^1 v_1 + \dots + a^n v_n$. Pak pro každé i takové, že $a^i \neq 0$, platí $[\![v_1, \dots, v_n]\!] = [\![v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_n]\!]$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $a^1 \neq 0$ (pro jiné indexy je důkaz stejný). Potom

$$v_1 = \frac{1}{a^1} u - \sum_{i=2}^{n} \frac{a^i}{a^1} v_i.$$

Buď $w \in [\![v_1, \dots, v_n]\!]$. Existují tedy $b^1, b^2, \dots, b^n$ takové, že

$$\begin{aligned} w &= b^1 v_1 + b^2 v_2 + \dots + b^n v_n = \\ &= \frac{b^1}{a^1} u - \sum_{i=2}^{n} \frac{b^1 a^i}{a^1} v_i + b^2 v_2 + \dots + b^n v_n = \\ &= \frac{b^1}{a^1} u + \sum_{i=2}^{n} \left(b^i - \frac{b^1 a^i}{a^1} \right) v_i \in [\![u, v_2, \dots, v_n]\!]. \end{aligned}$$

Buď $w \in [\![u, v_2, \dots, v_n]\!]$. Existují tedy $c^1, c^2, \dots, c^n$ takové, že

$$\begin{aligned} w &= c^1 u + c^2 v_2 + \dots + c^n v_n = \\ &= c^1 \sum_{i=1}^{n} a^i v_i + \sum_{i=2}^{n} c^i v_i = \\ &= c^1 a^1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} (c^1 a^i + c^i) v_i \in [\![v_1, \dots, v_n]\!]. \end{aligned}$$

□

Tvrzení 9.2.7 (Steinitzova věta o výměně). *Nechť vektory $v_1, \dots, v_n$ generují prostor V a $\{u_1, \dots, u_m\} \subset V$ je lineárně nezávislá. Pak $m \leq n$ a existují indexy $i_1, \dots, i_{n-m} \in \{1, \dots, n\}$ takové, že*

$$[\![v_1, \dots, v_n]\!] = [\![u_1, \dots, u_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-m}}]\!].$$

Důkaz. Množina $\{u_1, \dots, u_m\}$ je lineárně nezávislá, takže všechny u_i jsou nenulové. Vektor u_1 je lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_n$ s aspoň jedním nenulovým koeficientem a stejně jako v předchozím důkazu předpokládejme, že nenulový koeficient je u v_1. Z Lemmatu o výměně dostaneme $[\![v_1, v_2, \dots, v_n]\!] = [\![u_1, v_2, \dots, v_n]\!]$.

Potom vektor u_2 je lineární kombinací vektorů $u_1, v_2, \dots, v_n$ s aspoň jedním nenulovým koeficientem u vektorů $v_2, \dots, v_n$ (jinak by byla množina $\{u_1, u_2\}$ lineárně závislá). Opět pro jednoduchost předpokládejme, že nenulový koeficient je u v_2. Z Lemmatu o výměně dostaneme $[\![u_1, v_2, \dots, v_n]\!] = [\![u_1, u_2, v_3, \dots, v_n]\!]$.

Takto pokračujeme, dokud buď nepoužijeme všechny vektory $u_1, \dots, u_m$ nebo nevyměníme všechny vektory $v_1, \dots, v_n$ za vektory $u_1, \dots, u_n$. Kdyby bylo $m > n$, vektory $u_{n+1}, \dots, u_m$ by byly lineární kombinace vektorů $u_1, u_2, \dots, u_n$ ve sporu s lineární nezávislostí množiny $\{u_1, \dots, u_m\}$. Takže $m \leq n$ a $[\![v_1, \dots, v_n]\!] = [\![u_1, \dots, u_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-m}}]\!]$.

□

9.3. Báze

Definice 9.3.1. *Báze* vektorového prostoru je libovolná uspořádaná lineárně nezávislá množina jeho generátorů.

Obvykle tedy budeme bázi vektorového prostoru zapisovat jako uspořádanou n-tici vektorů. Pokud nebude záležet na uspořádání vektorů v bázi, budeme ji někdy zapisovat jen jako množinu vektorů.

Příklad. (1) (6) je báze $\mathbb{R}$.

(2) $((1,0),(0,1))$ je báze $\mathbb{R}^2$.

(3) $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ je báze $\mathbb{R}^3$.

(4) Pro každé $i \in \{1,\ldots,n\}$ buď e_i vektor z $\mathbb{R}^n$, který má na i-tém místě jedničku a jinde nuly. Potom $(e_1,\ldots,e_n)$ je báze $\mathbb{R}^n$ a nazývá se *kanonická* nebo také *standardní*.

(5) $(x^2,x,1)$ je báze $\mathbb{R}_2[x]$. $\square$