10. přednáška, 5. 12. 2023

9. Vektorové prostory

9.1. Definice, příklady, základní vlastnosti

Vektor je běžně znázorňován v rovině nebo v prostoru jako orientovaná úsečka (šipka), která má počáteční bod a koncový bod. Pokud je možné jeden takový vektor převést na druhý takový vektor rovnoběžným posunutím, říká se, že tyto dva vektory jsou totožné nebo ekvivalentní, nebo že jsou to dvě umístění jednoho vektoru. Takové vektory se sčítají pomocí pravidla rovnoběžníku a násobí se reálným číslem tak, že šipka se příslušně prodlouží nebo zkrátí a při násobení záporným číslem navíc změní směr na opačný.

Obecně definujeme vektor jako prvek vektorového prostoru a vektorový prostor nad nějakým polem jako množinu s operací sčítání a s násobením prvků množiny prvky pole s takovými vlastnostmi, které umožňují představu vektoru jako šipky a představu sčítání vektorů a násobení vektoru prvkem pole, jak je uvedeno v předchozím odstavci.

Definice 9.1.1. Buď V neprázdná množina, P pole. *Vektorový prostor V nad polem P* je množina V spolu s binární operací $+\colon V \times V \to V$, $(u, v) \mapsto u + v$, a zobrazením $\cdot\colon P \times V \to V$, $(p, v) \mapsto p \cdot v$, takovými, že

(1) pro každé $u, v, w \in V$ platí $(u + v) + w = u + (v + w)$,
(2) existuje $0 \in V$ takový, že pro každé $v \in V$ platí $v + 0 = v$,
(3) pro každé $v \in V$ existuje $-v \in V$ takové, že $v + (-v) = 0$,
(4) pro každé $u, v \in V$ platí $u + v = v + u$,
(5) pro každé $v \in V$ platí $1 \cdot v = v$,
(6) pro každé $p, q \in P$ a $v \in V$ platí $(p \cdot q) \cdot v = p \cdot (q \cdot v)$,
(7) pro každé $p, q \in P$ a $v \in V$ platí $(p + q) \cdot v = (p \cdot v) + (q \cdot v)$,
(8) pro každé $p \in P$ a $u, v \in V$ platí $p \cdot (u + v) = (p \cdot u) + (p \cdot v)$.

Prvky množiny V jsou *vektory*, prvky pole P jsou *skaláry*. Binární operace $+$ se nazývá *sčítání*, zobrazení $\cdot$ se nazývá *násobení skalárem*, vektor $0 \in V$ je *nulový vektor* nebo *nula*, vektor $-v$ je *opačný vektor* k vektoru v.

Podmínky (1)–(8) jsou *axiomy vektorového prostoru.* Podmínky (1)–(4) znamenají, že V s operací $+$ je komutativní grupa.

Jelikož každá binární operace má nejvýše jeden neutrální prvek, ve vektorovém prostoru existuje jediný nulový vektor. Obdobně, jelikož každý prvek má vzhledem k asociativní binární operaci nejvýše jeden inverzní prvek, ke každému vektoru existuje jediný opačný vektor.

Násobení skalárem $\cdot\colon P \times V \to V$, $(p, v) \mapsto p \cdot v$, není binární operace (není-li $P = V$), ale nazývá se *vnější operace*, a místo $p \cdot v$ se často píše jen pv. Binární operace se někdy nazývá *vnitřní operace.*

Vektorový prostor nad polem $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$ se nazývá *reálný*, resp. *komplexní* vektorový prostor.

Příklad. (1) Vektorový prostor Eukleidovské geometrie, dvojrozměrné i trojrozměrné, kde vektor je třída ekvivalentních šipek a je reprezentován jednotlivými šipkami, jak je uvedeno v prvním odstavci této kapitoly.

Nulový vektor je reprezentován degenerovanou úsečkou nulové délky. Vektorový prostor v rovině resp. prostoru značíme E^2 resp. E^3.

(2) Buď V jednoprvková množina, P pole. Jediný prvek množiny V označme 0 a položme $0 + 0 = 0$, $-0 = 0$ a $p \cdot 0 = 0$ pro každé $p \in P$. Dostáváme vektorový prostor nazývaný *nulový prostor* nebo *triviální prostor*.

(3) Každé pole je vektorový prostor nad sebou samým. Položíme-li v definici vektorového prostoru $V = P$, budou všechny axiomy vektorového prostoru důsledky axiomů pole (ověřte). Získáváme tak například vektorový prostor $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{R}$, vektorový prostor $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$, vektorový prostor $\mathbb{Q}$ nad $\mathbb{Q}$ a vektorový prostor $\mathbb{Z}_2$ nad $\mathbb{Z}_2$.

(4) Každé pole je vektorový prostor nad libovolným svým podpolem. Jediný rozdíl oproti předchozímu příkladu spočívá v tom, že násobení skalárem je dovoleno jen pro skaláry z podpole.

(5) Buď $n \in \mathbb{N}$, P pole. Na množině P^n všech uspořádaných n-tic prvků P zaveďme sčítání a násobení skalárem předpisem

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n),$$
$$p(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (pu_1, pu_2, \ldots, pu_n).$$

Vzniká vektorový prostor P^n nad polem P (ověřte). Například řádky a sloupky matic jsou prvky takových vektorových prostorů.

(6) Vektorový prostor P^n nad podpolem $Q \subset P$.

(7) Vektorový prostor matic typu $m \times n$ nad polem P s operacemi sčítání a násobení skalárem. Značí se $P^{m \times n}$ nebo $\mathcal{M}_{m \times n}(P)$ (resp. $\mathcal{M}_m(P)$ nebo $\mathrm{gl}(m, P)$ v případě čtvercových matic).

(8) Vektorový prostor polynomů stupně nejvýše n nad polem P s operacemi sčítání a násobení skalárem.

(9) Vektorový prostor polynomů nad polem P s operacemi sčítání a násobení skalárem.

(10) Vektorový prostor všech řešení homogenní soustavy rovnic.

(11) Buď X množina, P pole. Na množině P^X všech zobrazení $X \to P$ zaveďme sčítání a násobení skalárem předpisem

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x),$$
$$(pu)(x) = p \cdot u(x).$$

Vzniká vektorový prostor P^X nad polem P (ověřte). Speciální případy jsou množina všech funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, množina všech spojitých funkcí na $\mathbb{R}$, množina diferencovatelných funkcí na $\mathbb{R}$, množina všech spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$. □

Tvrzení 9.1.1. *Buď V vektorový prostor nad polem P. Pak pro každé $u, v \in V$, $p, q \in P$ platí*

(i) $0 \cdot v = 0$,
(ii) $(-1) \cdot v = -v$,
(iii) $(p - q) \cdot v = p \cdot v - q \cdot v$,
(iv) $p \cdot (u - v) = p \cdot u - p \cdot v$,
(v) Je-li $p \cdot v = 0$, *pak buď* $p = 0$ *nebo* $v = 0$.

Důkaz. Cvičení. □

9.2. Lineární kombinace, generátory, lineární nezávislost

Buď V vektorový prostor nad polem P.

Definice 9.2.1. Buďte $n \in \mathbb{N}$, $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ a $p^1, p^2, \dots, p^n \in P$. *Lineární kombinace* vektorů $v_1, v_2, \dots, v_n$ s koeficienty $p^1, p^2, \dots, p^n$ je vektor

$$p^1 v_1 + p^2 v_2 + \cdots + p^n v_n \in V.$$

Lineární kombinace prázdné množiny vektorů, tedy $n = 0$, je nulový vektor $0 \in V$.

Příklad. (1) Součet vektorů u, v je jejich lineární kombinace s koeficienty $1, 1$. Opačný vektor k v je jeho lineární kombinace (skalární násobek) s koeficientem -1:

$$u + v = 1 \cdot u + 1 \cdot v, \quad -v = (-1) \cdot v.$$

(2) Lineární kombinace vektorů $1, 6 \in \mathbb{R}$ s koeficienty $3, 1 \in \mathbb{R}$ je $3 \cdot 1 + 1 \cdot 6 = 9$.

(3) Lineární kombinace vektorů $(1, 2, 0), (2, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ s koeficienty $-3, 2 \in \mathbb{R}$ je

$$(-3) \cdot (1, 2, 0) + 2 \cdot (2, 3, 1) = (1, 0, 2).$$

□

Definice 9.2.2. Buď $U \subseteq V$. *Lineární obal* množiny U je množina $[\![U]\!]$ všech lineárních kombinací konečně mnoha vektorů množiny U. Pro $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ je

$$[\![U]\!] = [\![u_1, u_2, \dots, u_n]\!] = \{p^1 u_1 + p^2 u_2 + \cdots + p^n u_n |\ p^1, p^2, \dots, p^n \in P\}.$$

Lineární obal prázdné množiny je $[\![\emptyset]\!] = \{0\}$.

Definice 9.2.3. Vektory $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ *generují* V, je-li každý vektor $v \in V$ jejich lineární kombinací, to jest, jestliže pro každý vektor $v \in V$ existují skaláry $p^1, p^2, \dots, p^n \in P$ takové, že $v = p^1 v_1 + p^2 v_2 + \cdots + p^n v_n$, to jest, jestliže $[\![v_1, v_2, \dots, v_n]\!] = V$.
V takovém případě také množina $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *generuje* V nebo je *množina generátorů* prostoru V nebo V je *generován* vektory $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Příklad. (1) Prostor $\mathbb{R}^3$ je generován vektory $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Skutečně, libovolný vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ je jejich lineární kombinací s koeficienty x, y, z:

$$(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1).$$

(2) Prostor $\mathbb{R}^3$ je generován vektory $(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$. Skutečně, libovolný vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ je jejich lineární kombinací s koeficienty $x - y, y - z, z$:

$$(x, y, z) = (x - y) \cdot (1, 0, 0) + (y - z) \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (1, 1, 1).$$

(3) Prostor $\mathbb{R}^3$ je generován vektory $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (3, 4, 5)$. Libovolný vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ je jejich lineární kombinací s koeficienty $x, y, z, 0$:

$$(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1) + 0 \cdot (3, 4, 5).$$

V tomto případě můžeme najít dokonce nekonečně mnoho vyjádření ve tvaru lineární kombinace, pro libovolný parametr $t \in \mathbb{R}$ platí

$$(x, y, z) = (x - 3t) \cdot (1, 0, 0) + (y - 4t) \cdot (0, 1, 0) + (z - 5t) \cdot (0, 0, 1) + t \cdot (3, 4, 5).$$

(4) Prostor $\mathbb{R}^3$ není generován vektory $(1, 2, 0), (3, 4, 0), (5, 6, 0)$. Ověřte.

(5) Vektory $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$, kde $v_i = (v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^m)$, generují $\mathbb{R}^m$, jestliže soustava

$$\begin{aligned}
v_1^1 x^1 + v_2^1 x^2 + \cdots + v_n^1 x^n &= v^1 \\
v_1^2 x^1 + v_2^2 x^2 + \cdots + v_n^2 x^n &= v^2 \\
&\vdots \\
v_1^m x^1 + v_2^m x^2 + \cdots + v_n^m x^n &= v^m
\end{aligned}$$

o neznámých $x^1, x^2, \dots, x^n$ má řešení pro každou pravou stranu $v^1, v^2, \dots, v^m$. Soustava je totiž ekvivalentní s podmínkou

$$x^1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^m \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \\ \vdots \\ v_2^m \end{pmatrix} + \cdots + x^n \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix}.$$

(6) Prostor $\mathbb{R}_2[x]$ polynomů neurčité x s reálnými koeficienty stupně nejvýše 2 je generován vektory $x^2, x+1, 1$. Ověřte. □

Definice 9.2.4. Prostor, který má konečnou množinu generátorů, je *konečněrozměrný.*

Příklad. Vektorový prostor $\mathbb{R}[x]$ všech polynomů s reálnými koeficienty není konečněrozměrný. Pro libovolné $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}[x]$ existuje přirozené číslo m, které je větší než stupeň kteréhokoliv z polynomů $p_1, \dots, p_n$. Pak polynom $x^m \in \mathbb{R}[x]$ není lineární kombinací polynomů $p_1, \dots, p_n$, takže polynomy $p_1, \dots, p_n$ negenerují $\mathbb{R}[x]$. □

Cvičení. (1) Jestliže $v_1, \dots, v_n$ generují V a v_i je lineární kombinací ostatních, pak $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ také generují V. Dokažte.

(2) Nechť každý z vektorů $v_1, \dots, v_n$ je lineární kombinace vektorů $u_1, \dots, u_m \in V$. Jestliže $v_1, \dots, v_n$ generují V, pak $u_1, \dots, u_m$ také generují V. Dokažte. □

Definice 9.2.5. Buď V vektorový prostor nad polem P.

(1) Množina vektorů $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ je *lineárně nezávislá*, jestliže z rovnosti

$$x^1 v_1 + x^2 v_2 + \cdots + x^n v_n = 0, \text{ kde } x^1, x^2, \dots, x^n \in P,$$

plyne $x^1 = x^2 = \cdots = x^n = 0$.

(2) Množina vektorů $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ je *lineárně závislá*, jestliže není lineárně nezávislá.

Často se zjednodušeně a nepřesně říká, že nějaké vektory jsou lineárně (ne)závislé. Myslí se tím, že příslušná množina vektorů je lineárně (ne)závislá.

Příklad. (1) Množina $\{7\} \subset \mathbb{R}$ je lineárně nezávislá. Je-li $x \cdot 7 = 0$ pro nějaké $x \in \mathbb{R}$, pak $x = 0$ (pro nenulové x uvedená rovnost $x \cdot 7 = 0$ neplatí).

(2) Množina $\{2, 3\} \subset \mathbb{R}$ je lineárně závislá. Lineární kombinace $x^1 \cdot 2 + x^2 \cdot 3$ může být rovna 0, i když je některý z koeficientů x^1, x^2 nenulový, například $x^1 = 3, x^2 = -2$.

(3) Množina $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ je lineárně nezávislá. Lineární kombinace $x \cdot (1,0,0) + y \cdot (0,1,0) + z \cdot (0,0,1)$ je vektor (x, y, z), který je roven $(0,0,0)$ právě tehdy, když $x = y = z = 0$ (ověřte).

(4) Množina $\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ je lineárně nezávislá. Lineární kombinace $x \cdot (1,0,0) + y \cdot (1,1,0) + z \cdot (1,1,1)$ je vektor $(x+y+z, y+z, z)$, který je roven $(0,0,0)$ právě tehdy, když $x = y = z = 0$ (ověřte).

(5) Množina $\{(1,0,-1), (0,1,2), (2,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ je lineárně závislá. Lineární kombinace $x \cdot (1,0,-1) + y \cdot (0,1,2) + z \cdot (2,1,0)$ je vektor $(x+2z, y+z, -x+2y)$, který je roven $(0,0,0)$ i pro nenulové koeficienty x, y, z, například $x = 2, y = 1, z = -1$. Ověřte.

(6) Libovolná množina vektorů obsahující nulový vektor je lineárně závislá. Lineární kombinace $0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n + 1 \cdot 0$ je nulový vektor a přitom aspoň jeden koeficient je nenulový.

(7) Množina $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^m$, kde $v_i = (v_i^1, \dots, v_i^m)$, je lineárně nezávislá právě tehdy, když soustava

$$\begin{aligned}
&v_1^1 x^1 + v_2^1 x^2 + \cdots + v_n^1 x^n = 0\\
&v_1^2 x^1 + v_2^2 x^2 + \cdots + v_n^2 x^n = 0\\
&\vdots\\
&v_1^m x^1 + v_2^m x^2 + \cdots + v_n^m x^n = 0
\end{aligned}$$

má právě jedno řešení, a to sice $x^1 = x^2 = \cdots = x^n = 0$.

(8) Množina $\{x^2, x, 1\} \subset \mathbb{R}_2[x]$ je lineárně nezávislá. Ověřte.

(9) Prázdná množina je lineárně nezávislá, protože všechny koeficienty z prázdné množiny koeficientů jsou nulové. □

Cvičení. (1) Libovolná podmnožina lineárně nezávislé množiny vektorů je lineárně nezávislá. Dokažte.

(2) Jednoprvková monžina $\{v\} \subset V$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když $v \neq 0$. Dokažte. □