Pole

Uvažujme množinu všech reálných čísel. Reálná čísla sčítáme a násobíme, ke každému reálnému číslu existuje číslo opačné (součet čísla a k němu opačného čísla je roven 0), ke každému nenulovému reálnému číslu existuje číslo inverzní (převrácená hodnota, součin čísla a k němu inverzního čísla je roven 1). Pro libovolná reálná čísla a, b, c navíc platí

$$\begin{aligned} &a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a && \text{(součet a součin jsou komutativní,} \\ &a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c && \text{asociativní} \\ &a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c && \text{a splňují distributivní zákon)} \end{aligned}$$

Každá množina obsahující aspoň 2 prvky (obvykle označované 0 a 1) s uvedenými operacemi s uvedenými vlastnostmi se nazývá *pole*. Příkladem pole je *pole komplexních čísel*, které značíme $\mathbb{C}$.

Každá podmnožina množiny komplexních čísel, která obsahuje 0 a 1, s každým číslem obsahuje k němu opačné, s každým nenulovým číslem obsahuje k němu inverzní a s libovolnými dvěmi čísly obsahuje jejich součet i součin, se nazývá *číselné pole*.

Příklady číselných polí jsou množina komplexních čísel $\mathbb{C}$, množina reálných čísel $\mathbb{R}$ a množina racionáních čísel $\mathbb{Q}$. Například množina celých čísel $\mathbb{Z}$ a množina přirozených (kladných celých) čísel $\mathbb{N}$ nejsou pole.

Je-li P pole a n přirozené číslo, potom P^n označuje množinu všech uspořádaných n-tic prvků pole P.

Polím se ještě budeme věnovat později, v kapitole 6.

1. Matice

1.1. Matice

Definice 1.1.1. Buď P pole, buďte m, n přirozená čísla. *Matice* typu $m \times n$ nad polem P je tabulka o m řádcích a n sloupcích obsahující na každém místě nějaký prvek pole P (a nic jiného). Máme-li takovou matici A, pak prvek pole P v i-tém řádku a j-tém sloupku označujeme A^i_j a matici zapisujeme obvykle

$$A = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \dots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^m_1 & A^m_2 & \dots & A^m_n \end{pmatrix}$$

nebo stručněji $A = (A^i_j)_{m \times n}$ nebo jen $A = (A^i_j)$.

Matici typu $m \times n$ nad polem P je možné definovat také jako zobrazení z kartézského součinu $\{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ do pole P. Takové zobrazení tedy uspořádané dvojici (i, j) přiřazuje $A^i_j \in P$ a můžeme ho zapsat právě ve tvaru tabulky, která má v i-tém řádku a j-tém sloupku prvek A^i_j.

Horním indexům říkáme *řádkové*, dolním indexům říkáme *sloupkové*. Pro pevně zvolené i

$$A^i_\circ = \begin{pmatrix} A^i_1 & A^i_2 & \dots & A^i_n \end{pmatrix}$$

je i*-tý řádek* matice A; je to tedy matice typu $1\times n$, někdy ji zapisujeme jako uspořádanou n-tici $(A^i_1, A^i_2, \dots, A^i_n) \in P^n$. Nulový řádek označme $0_\circ$. Pro pevně zvolené j

$$A^\circ_j = \begin{pmatrix} A^1_j \\ A^2_j \\ \vdots \\ A^m_j \end{pmatrix}$$

je j*-tý sloupek* matice A; je to tedy matice typu $m\times 1$, někdy ji zapisujeme jako uspořádanou m-tici $(A^1_j, A^2_j, \dots, A^m_j) \in P^m$ nebo $\begin{pmatrix} A^1_j & A^2_j & \dots & A^m_j \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ nebo $(A^1_j, A^2_j, \dots, A^m_j)^\mathsf{T}$. Nulový sloupek označme 0°. To, že matice A je tvořena řádky $A^i_\circ$, resp. sloupky A°_j, budeme někdy zapisovat

$$A = \begin{pmatrix} A^1_\circ \\ A^2_\circ \\ \vdots \\ A^m_\circ \end{pmatrix}, \quad \text{resp. } A = \begin{pmatrix} A^\circ_1 & A^\circ_2 & \dots & A^\circ_n \end{pmatrix}.$$

Definice 1.1.2. Matice $A = (A^i_j)$ a $B = (B^i_j)$ se vzájemně *rovnají*, jestliže jsou stejného typu a na stejných místech mají stejné prvky, tedy jsou-li typu $m \times n$ a pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí $A^i_j = B^i_j$.

Definice 1.1.3. Matice $A = (A^i_j)_{m\times n}$ je

- *čtvercová*, jestliže $m = n$,
- *diagonální*, jestliže je čtvercová a $A^i_j = 0$ pro $i \neq j$ (prvky A^i_i se také nazývají *diagonální* a tvoří *(hlavní) diagonálu*),
- *jednotková*, jestliže je diagonální a $A^i_i = 1$ pro každé i (označujeme ji E_n nebo jen E),
- *nulová*, jestliže má všechny prvky nulové (označujeme ji $0_{m\times n}$ nebo jen 0),
- *horní* resp. *dolní trojúhelníková* (nebo v *horním* resp. *dolním trojúhelníkovém tvaru*), jestliže je čtvercová a pod resp. nad diagonálou má jen nuly, tedy $A^i_j = 0$ pro $i > j$ resp. pro $i < j$,
- *schodovitá* (nebo ve *schodovitém tvaru*), jestliže každý nenulový řádek, kromě prvního, začíná zleva více nulami než řádek předchozí,
- v *Gaussově–Jordanově tvaru*, jestliže
  (i) je ve schodovitém tvaru,
  (ii) první (zleva) nenulové prvky všech nenulových řádků jsou 1,
  (iii) ve sloupcích nad (a nejen pod) prvními nenulovými prvky všech nenulových řádků jsou jen 0,
- v *Gaussově kanonickém tvaru*, jestliže je rovna matici
  $$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
  kde E je jednotková matice a 0 označují nulové matice příslušných typů,

- *blokově diagonální*, jestliže je rovna matici
$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix},$$
kde $k > 1$, $A_1, \ldots, A_k$ jsou čtvercové matice (bloky) a 0 označují nulové matice příslušných typů.

Množinu všech matic typu $m \times n$ nad polem P označujeme $\mathcal{M}_{m\times n}(P)$ nebo $P^{m\times n}$; v případě čtvercových matic také $\mathcal{M}_n(P)$ nebo $\mathrm{gl}(n, P)$.

Příklad. (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ je čtvercová matice, } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ není čtvercová matice.}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ je diagonální matice, } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ není diagonální není.}$$

(3)

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ jsou jednotkové matice.}$$

(4)

$$0_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ jsou nulové matice.}$$

(5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ je horní trojúhelníková matice,}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ je dolní trojúhelníková matice.}$$

(6)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ je matice ve schodovitém tvaru,}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ není matice ve schodovitém tvaru.}$$

(7)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ je matice v Gaussově–Jordanově tvaru,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ není matice v Gaussově–Jordanově tvaru.}$$

(8)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ je blokově diagonální matice,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ není blokově diagonální matice.}$$

□

1.2. Operace s maticemi

1.2.1. Součet matic a násobek matice

Definice 1.2.1. Buďte A, B matice typu $m \times n$ nad polem P. *Součet* matic A, B je matice $A + B$ typu $m \times n$ nad polem P taková, že pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$(A + B)^i_j = A^i_j + B^i_j.$$

Sčítáme tedy jen matice stejného typu. Matice různých typů nelze sčítat.

Definice 1.2.2. Buďte A matice typu $m \times n$ nad polem P a $c \in P$. Potom c-*násobek* matice A je matice cA typu $m \times n$ nad polem P taková, že pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$(cA)^i_j = cA^i_j.$$

Pro $c = -1$ se matice $(-1)A$ značí $-A$ a nazývá se *opačná* matice k matici A.

Příklad. Pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \text{ je}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 + (-1) & 2 + 0 & 3 + 2 \\ 4 + 1 & 5 + (-3) & 6 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 13 \end{pmatrix},$$

$$6A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 24 & 30 & 36 \end{pmatrix}, \quad -B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

□

Cvičení. Spočtěte

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2&1\\0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}3&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0&0\\-2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0\\-2&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&-2\\-3&-4\end{pmatrix}.$$

□

Tvrzení 1.2.1. *Nechť A, B, C jsou matice stejného typu nad polem P a $c, k \in P$. Pak*

(1) $A + B = B + A$,
(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$,
(3) $A + 0 = A$,
(4) $A + (-A) = 0$,
(5) $1A = A$,
(6) $c(A + B) = cA + cB$,
(7) $(c + k)A = cA + kA$,
(8) $c(kA) = (ck)A$.

Důkaz. Uvedeme jen důkaz bodů (2) a (6), ostatní ponecháme jako cvičení.

(2) Máme dokázat, že matice $A+(B+C)$ se rovná matici $(A+B)+C$. Předpokládejme, že A, B, C jsou typu $m\times n$. Potom i $B+C$ a $A+B$ jsou typu $m\times n$, a tedy i $A+(B+C)$ a $(A + B) + C$ jsou typu $m \times n$.

Pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ prvek v i-tém řádku a j-tém sloupku matice $A + (B + C)$ je

$$\begin{aligned}
&(A + (B + C))^i_j = && \text{(podle definice součtu matic)}\\
&\quad = A^i_j + (B + C)^i_j = && \text{(podle definice součtu matic)}\\
&\quad = A^i_j + (B^i_j + C^i_j) = && \text{(díky asociativitě sčítání v poli)}\\
&\quad = (A^i_j + B^i_j) + C^i_j = && \text{(podle definice součtu matic)}\\
&\quad = (A + B)^i_j + C^i_j = && \text{(podle definice součtu matic)}\\
&\quad = ((A + B) + C)^i_j,
\end{aligned}$$

což je prvek v i-tém řádku a j-tém sloupku matice $(A + B) + C$.

Dokázali jsme, že matice $A+(B+C)$ a $(A+B)+C$ jsou stejného typu a na stejných místech mají stejné prvky.

(6) Máme dokázat, že matice $c(A + B)$ se rovná matici $cA + cB$. Předpokládejme, že A, B jsou typu $m \times n$. Potom i $A + B$, cA a cB jsou typu $m \times n$, a tedy i $c(A + B)$ a $cA + cB$ jsou typu $m \times n$.

Pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ prvek v i-tém řádku a j-tém sloupku matice $c(A + B)$ je

$$\begin{aligned}
&(c(A + B))^i_j = && \text{(podle definice } c\text{-násobku matice)}\\
&\quad = c(A + B)^i_j = && \text{(podle definice součtu matic)}\\
&\quad = c(A^i_j + B^i_j) = && \text{(díky distributivnímu zákonu v poli)}\\
&\quad = cA^i_j + cB^i_j = && \text{(podle definice } c\text{-násobku matice)}\\
&\quad = (cA)^i_j + (cB)^i_j = && \text{(podle definice součtu matic)}\\
&\quad = (cA + cB)^i_j,
\end{aligned}$$

což je prvek v i-tém řádku a j-tém sloupku matice $cA + cB$.

Dokázali jsme, že matice $c(A+B)$ a $cA+cB$ jsou stejného typu a na stejných místech mají stejné prvky. $\square$

Uvedli jsme si, že řádky a sloupky matice chápeme jako matice. Můžeme je tedy také násobit prvky příslušného pole, můžeme sčítat řádky a sčítat sloupky, jsou-li stejného typu a nad stejným polem.

Následující definici formulujeme pouze pro řádky matice, ale obdobně lze formulovat pro sloupky, uspořádané n-tice a matice.

Definice 1.2.3. Buďte $A_\circ^{i_1}, A_\circ^{i_2}, \dots, A_\circ^{i_k}$ řádky matice nad polem P, $c_1, c_2, \dots, c_k \in P$. *Lineární kombinace* řádků $A_\circ^{i_1}, A_\circ^{i_2}, \dots, A_\circ^{i_k}$ s *koeficienty* $c_1, c_2, \dots, c_k$ je řádek

$$c_1 A_\circ^{i_1} + c_2 A_\circ^{i_2} + \cdots + c_k A_\circ^{i_k} = \sum_{j=1}^{k} c_j A_\circ^{i_j}.$$

Máme-li prázdnou množinu řádků (tedy, nemáme žádný řádek), jejich lineární kombinaci definujeme jako nulový řádek. Takže, nulový řádek je lineární kombinací řádků z prázdné množiny.

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{tedy} \qquad \begin{array}{l} A_\circ^1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A_\circ^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ A_\circ^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ A_\circ^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A_\circ^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ A_\circ^6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Pro $A_\circ^1, A_\circ^3, A_\circ^6$ a $c_1 = 2, c_2 = -1, c_3 = 2$ dostaneme

$$\begin{aligned} & c_1 A_\circ^1 + c_2 A_\circ^3 + c_3 A_\circ^6 = \\ & \quad = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ & \quad = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \\ & \quad = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$

1.2.2. Součin

Definice 1.2.4. Buďte A matice typu $m \times n$ a B matice typu $n \times p$ nad polem P. *Součin* matic A, B (v tomto pořadí) je matice $A \cdot B$ (obvykle označovaná jen AB) typu $m \times p$ nad polem P taková, že pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, p\}$

$$(AB)_j^i = A_1^i B_j^1 + A_2^i B_j^2 + \cdots + A_n^i B_j^n = \sum_{k=1}^{n} A_k^i B_j^k.$$

Matice B má tedy tolik řádků, kolik má matice A sloupků. Prvek matice AB v i-tém řádku a j-tém sloupku získáme tedy tak, že sečteme součiny prvků v i-tém řádku matice

A s odpovídajícími prvky v j-tém sloupku matice B. Tedy

$$AB = \begin{pmatrix} A^1_1B^1_1 + A^1_2B^2_1 + \cdots + A^1_nB^n_1 & \cdots & A^1_1B^1_p + A^1_2B^2_p + \cdots + A^1_nB^n_p \\ A^2_1B^1_1 + A^2_2B^2_1 + \cdots + A^2_nB^n_1 & \cdots & A^2_1B^1_p + A^2_2B^2_p + \cdots + A^2_nB^n_p \\ \vdots & & \vdots \\ A^m_1B^1_1 + A^m_2B^2_1 + \cdots + A^m_nB^n_1 & \cdots & A^m_1B^1_p + A^m_2B^2_p + \cdots + A^m_nB^n_p \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A^1_1B^1_\circ + A^1_2B^2_\circ + \cdots + A^1_nB^n_\circ \\ A^2_1B^1_\circ + A^2_2B^2_\circ + \cdots + A^2_nB^n_\circ \\ \vdots \\ A^m_1B^1_\circ + A^m_2B^2_\circ + \cdots + A^m_nB^n_\circ \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A^1_\circ B \\ A^2_\circ B \\ \vdots \\ A^m_\circ B \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B^1_1A^\circ_1 + B^2_1A^\circ_2 + \cdots + B^n_1A^\circ_n & \cdots & B^1_pA^\circ_1 + B^2_pA^\circ_2 + \cdots + B^n_pA^\circ_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} AB^\circ_1 & AB^\circ_2 & \cdots & AB^\circ_p \end{pmatrix}.$$

Čili, první řádek matice AB získáme tak, že vezmeme A^1_1-násobek řádku $B^1_\circ$, A^1_2-násobek řádku $B^2_\circ$, …, A^1_n-násobek řádku $B^n_\circ$ a všechny tyto násobky sečteme. Je to tedy lineární kombinace řádků matice B s koeficienty z prvního řádku matice A, jinými slovy, součin prvního řádku matice A, řádek je matice typu $1 \times n$, a matice B.

Obdobně získáme ostatní řádky matice AB. Obecně, i-tý řádek matice AB získáme tak, že pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ prvkem A^i_k vynásobíme k-tý řádek matice B a všechny tyto násobky sečteme. Takže i-tý řádek matice AB je lineární kombinace řádků matice B s koeficienty z i-tého řádku matice A, jinými slovy, součin i-tého řádku matice A, řádek je matice typu $1 \times n$, a matice B.

Analogicky, první sloupek matice AB získáme tak, že vezmeme B^1_1-násobek sloupku A°_1, B^2_1-násobek sloupku A°_2, …, B^n_1-násobek sloupku A°_n a všechny tyto násobky sečteme. Je to tedy lineární kombinace sloupků matice A s koeficienty z prvního sloupku matice B, jinými slovy, součin matice A a prvního sloupku matice B, sloupek je matice typu $n \times 1$.

Obdobně získáme ostatní sloupky matice AB. Obecně, j-tý sloupek matice AB získáme tak, že pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ prvkem B^k_j vynásobíme k-tý sloupek matice A a všechny tyto násobky sečteme. Takže j-tý sloupek matice AB je lineární kombinace sloupků matice A s koeficienty z j-tého sloupku matice B, jinými slovy, součin matice A a j-tého sloupku matice B, sloupek je matice typu $n \times 1$.

Nejsou-li typy matic v uvedeném vztahu (druhá má tolik řádků, kolik má první sloupků), nelze je (v daném pořadí) násobit, příslušný součin neexistuje.

Příklad. (1) Pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ je}$$

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \\ 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} & 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 & (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \\ 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} & 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(2) Pro

$$\begin{aligned}
&A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ je} \\
&AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix}, \\
&BA = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 & 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(3) Pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ je } AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}, \ BA \text{ neexistuje.}$$

$\square$

Předcházející příklady ukazují, že násobení matic není komutativní, tedy nemusí platit $AB = BA$.

Cvičení. Spočtěte

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2&1\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}3&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0\\-2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\-2&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2&3\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2\\1&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&4\\5&6&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&1\\5&6&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2&1\\0&6&5\\0&0&4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&0&0\\4&5&0\\3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Tvrzení 1.2.2. *(1) Je-li i-tý řádek matice A nulový, pak i-tý řádek matice AB je nulový.*

(2) Je-li j-tý sloupek matice B nulový, pak j-tý sloupek matice AB je nulový.

(3) Součin diagonálních matic je diagonální matice.

(4) Součin blokově diagonálních matic s bloky stejných typů je blokově diagonální matice s bloky stejných typů.

Důkaz. Uvedeme jen důkaz bodu (4), ostatní ponecháme jako cvičení.

(4) Buďte A, B blokově diagonální matice s bloky $A_1, \dots, A_k$, resp. $B_1, \dots, B_k$ takovými, že pro každé i A_i, B_i jsou stejného typu. A, B jsou tedy čtvercové matice stejného typu a je možné je vzájemně násobit.

i-tý řádek matice A je

$$A^i_\circ = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & A^i_{i_1} & \dots & A^i_{i_m} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

j-tý sloupek matice B je

$$B^\circ_j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & B^{j_1}_j & \dots & B^{j_n}_j & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}.$$

Jsou-li i, j taková, že pozice v i-tém řádku a j-tém sloupku je mimo bloky $A_1, \dots, A_k$, resp. $B_1, \dots, B_k$, pak buď $i_m > j_1$ nebo $i_1 > j_n$. V obou případech

$$(AB)^i_j = 0,$$

takže AB je blokově diagonální matice s bloky stejných typů, jakých jsou bloky v maticích A a B. □

Tvrzení 1.2.3. *Nechť A, B, C jsou matice nad polem P takové, že níže uvedené operace jsou definovány, a $c \in P$. Pak platí*

(1) $A(BC) = (AB)C$,
(2) $AE = EA = A$,
(3) $A(B + C) = AB + AC$,
(4) $(A + B)C = AC + BC$,
(5) $c(AB) = (cA)B = A(cB)$.

Důkaz. Uvedeme jen důkaz bodů (1) a (3), ostatní ponecháme jako cvičení.

(1) Předpokládejme, že A je matice typu $m \times n$, B je matice typu $n \times p$ a C je matice typu $p \times q$. Potom AB je matice typu $m \times p$ a BC je matice typu $n \times q$, takže $A(BC)$ a $(AB)C$ jsou matice typu $m \times q$.

$$
\begin{aligned}
&(A(BC))^i_j = && \text{(podle definice součinu matic)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} A^i_k (BC)^k_j = && \text{(podle definice součinu matic)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} A^i_k \sum_{l=1}^{p} (B^k_l C^l_j) = && \text{(díky distributivnímu zákonu v poli)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} A^i_k (B^k_l C^l_j) = && \text{(díky asociativitě součinu v poli)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} (A^i_k B^k_l) C^l_j = && \text{(díky komutativitě součtu v poli)}\\
&= \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} (A^i_k B^k_l) C^l_j = && \text{(podle definice součinu matic)}\\
&= \sum_{l=1}^{p} (AB)^i_l C^l_j = && \text{(podle definice součinu matic)}\\
&= ((AB)C)^i_j.
\end{aligned}
$$

(3) Předpokládejme, že A je matice typu $m \times n$ a B, C jsou matice typu $n \times p$. Potom $A(B + C)$ a $AB + AC$ jsou matice typu $m \times p$ a pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ platí

$$
\begin{aligned}
&(A(B + C))^i_j = && \text{(podle definice součinu matic)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} A^i_k (B + C)^k_j = && \text{(podle definice součtu matic)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} A^i_k (B^k_j + C^k_j) = && \text{(díky distributivnímu zákonu v poli)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} (A^i_k B^k_j + A^i_k C^k_j) = && \text{(díky komutativitě sčítání v poli)}\\
&= \sum_{k=1}^{n} A^i_k B^k_j + \sum_{k=1}^{n} A^i_k C^k_j = && \text{(podle definice součinu matic)}\\
&= (AB)^i_j + (AC)^i_j = && \text{(podle definice součtu matic)}\\
&= (AB + AC)^i_j.
\end{aligned}
$$

□

1.2.3. Transponování

Definice 1.2.5. *Transponovaná* matice k matici A typu $m \times n$ je matice A^T typu $n \times m$, kde $(A^\mathsf{T})^i_j = A^j_i$ pro všechna i, j.

Příklad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$ □

Tvrzení 1.2.4. *Nechť A, B jsou matice nad polem P takové, že níže uvedené operace jsou definovány, a $c \in P$. Pak platí*

(1) $A = (A^\mathsf{T})^\mathsf{T}$,
(2) $(A + B)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} + B^\mathsf{T}$,
(3) $(cA)^\mathsf{T} = cA^\mathsf{T}$,
(4) $(AB)^\mathsf{T} = B^\mathsf{T} A^\mathsf{T}$.

Důkaz. (1) Je-li A typu $m \times n$, potom A^T je typu $n \times m$ a $(A^\mathsf{T})^\mathsf{T}$ je typu $m \times n$. Navíc pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$((A^\mathsf{T})^\mathsf{T})^i_j = (A^\mathsf{T})^j_i = A^i_j.$$

(4) Buďte A matice typu $m \times n$ a B matice typu $n \times p$. Pak A^T je typu $n \times m$, B^T je typu $p \times n$, AB je typu $m \times p$ a tedy $(AB)^\mathsf{T}$ i $B^\mathsf{T} A^\mathsf{T}$ jsou typu $p \times m$. Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ a $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ platí

$$((AB)^\mathsf{T})^i_j = (AB)^j_i = \sum_{k=1}^{n} A^j_k B^k_i = \sum_{k=1}^{n} B^k_i A^j_k = \sum_{k=1}^{n} (B^\mathsf{T})^i_k (A^\mathsf{T})^k_j =$$
$$= (B^\mathsf{T} A^\mathsf{T})^i_j.$$

Ostatní body jsou ponechány jako cvičení. □

Cvičení. Ukažte, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ a libovolné matice $A_1, \ldots, A_k$ vhodných typů platí $(A_1 \cdots A_k)^\mathsf{T} = A_k^\mathsf{T} \cdots A_1^\mathsf{T}$. □

1.3. Elementární úpravy a speciální tvary matic

1.3.1. Elementární úpravy

Definice 1.3.1. Mějme matici nad polem P. *Řádkové elementární úpravy* matice jsou

(1) přičtení c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku, kde $c \in P$ a $i \neq j$,
(2) vynásobení i-tého řádku nenulovým prvkem $c \in P$,
(3) vzájemná výměna i-tého řádku a j-tého řádku.

Sloupkové elementární úpravy matice definujeme analogicky.

Cvičení. Proveďte vzájemnou výměnu dvou řádků pomocí konečně mnoha úprav typů (1) a (2). □

Mějme matici A. Přičtením c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku změníme i-tý řádek na $\begin{pmatrix} A_1^i + cA_1^j & A_2^i + cA_2^j & \dots & A_n^i + cA_n^j \end{pmatrix}$ a ostatní řádky zůstanou beze změny.

Po vynásobení i-tého řádku prvkem $c \in P$ i-tý řádek bude $\begin{pmatrix} cA_1^i & cA_2^i & \dots & cA_n^i \end{pmatrix}$ a ostatní řádky zůstanou beze změny.

Po vzájemné výměně i-tého řádku a j-tého řádku i-tý řádek bude $\begin{pmatrix} A_1^j & A_2^j & \dots & A_n^j \end{pmatrix}$, j-tý řádek bude $\begin{pmatrix} A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \end{pmatrix}$ a ostatní řádky zůstanou beze změny.

Sloupkové úpravy fungují analogicky pro sloupky.

Příklad. (1) Přičtením 3-násobku prvního řádku k druhému řádku upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{na matici} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix}.$$

(2) Vzájemnou výměnou prvního sloupku a třetího sloupku upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{na matici} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix}.$$

□

Ke všem elementárním úpravám existují úpravy inverzní, které jsou také elementární a upravenou matici převedou zpět na původní matici. Inverzní úpravy k řádkovým úpravám jsou

(1) přičtení $-c$-násobku j-tého řádku k i-tému řádku,
(2) vynásobení i-tého řádku prvkem c^{-1},
(3) vzájemná výměna i-tého řádku a j-tého řádku.

Inverzní úpravy ke sloupkovým úpravám jsou obdobné.

Příklad. (1) Přičtením -3-násobku prvního řádku k druhému řádku upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{na matici} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(2) Vzájemnou výměnou prvního sloupku a třetího sloupku upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{na matici} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix}.$$

□

Definice 1.3.2. Matice A, B jsou *ekvivalentní*, jestliže B může vzniknout z A konečnou posloupností elementárních úprav. Je-li možné toho dosáhnout pomocí pouze řádkových, resp. sloupkových úprav, matice jsou *řádkově*, resp. *sloupkově ekvivalentní.* V každém případě značíme $A \sim B$.

Příklad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Tvrzení 1.3.1. *Ekvivalence matic je relace ekvivalence na množině všech matic stejného typu nad stejným polem.*

Důkaz. Cvičení. □

1.3.2. Schodovitý, Gaussův–Jordanův a Gaussův kanonický tvary matic

Připomeňme si definice z podkapitoly 1.1.

Definice 1.3.3. Matice je ve *schodovitém tvaru*, jestliže každý nenulový řádek, kromě prvního řádku, začíná zleva více nulami než řádek předchozí.

To znamená, že všechny řádky pod nulovým řádkem jsou nulové.

Definice 1.3.4. Matice je v *Gaussově–Jordanově tvaru*, jestliže
(i) je ve schodovitém tvaru,
(ii) v každém nenulovém řádku první (zleva) nenulový prvek je 1,
(iii) v každém sloupku, ve kterém je první nenulový prvek nějakého řádku, ostatní prvky jsou 0.

Definice 1.3.5. *Gaussův kanonický tvar* matice je

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde E je jednotková matice a 0 označuje nulové matice příslušných typů.

Příklad. (1) Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice A není ve schodovitém tvaru. Matice B je ve schodovitém tvaru, ale není v Gaussově–Jordanově tvaru. Matice C je v Gaussově–Jordanově tvaru.

(2) Každá nulová matice je ve schodovitém tvaru i v Gaussově–Jordanově tvaru. Nulová matice je v Gaussově kanonickém tvaru právě tehdy, když je čtvercová. □