9. přednáška, 18. 4. 2023

14.2. Druhý rozklad lineární transformace

Úmluva. Všude $P = \mathbb{C}$.

V přednášce o vlastních vektorech jsme se seznámili s diagonalizovatelnými transformacemi. V bázi složené z vlastních vektorů v_i mají diagonální matici s vlastními čísly λ_i na diagonále.

Obecná lineární transformace nemusí mít bázi složenou z vlastních vektorů. Nicméně, jak ukážeme, lze zkonstruovat jinou významnou bázi — Jordanovu. Matice lineární transformace v Jordanově bázi je tzv. Jordanova matice. Opět má na diagonále vlastní čísla, ale může obsahovat i nenulové prvky v řadě sousedící s diagonálou (všechny ovšem rovny 1).

Východiskem pro nalezení Jordanovy báze bude první rozklad, příslušný rozkladu charakteristického polynomu (nebo libovolného jiného anulujícího polynomu) χ_f na nesoudělné součinitele. Při $P = \mathbb{C}$ ovšem existuje rozklad na kořenové činitele

$$\chi_f = (x - \xi_1)^{k_1} \cdots (x - \xi_s)^{k_s}, \quad \xi_i \neq \xi_j \text{ pro } i \neq j,$$

a pro $i \neq j$ jsou polynomy $(x - \xi_i)^{k_i}$ a $(x - \xi_j)^{k_j}$ nesoudělné. Invariantní podprostory prvního rozkladu pak jsou

$$U_i = \operatorname{Ker}(f - \xi_i \operatorname{id})^{k_i}.$$

Na jednotlivých invariantních podprostorech vznikají restrikce $f|_{U_i} : U_i \to U_i$. Označíme-li $g_i = f - \xi_i \operatorname{id}$, pak $\operatorname{Ker} g_i^{k_i} = U_i$, a tedy $(g|_{U_i})^{k_i} = 0$.

Má tedy smysl studovat transformace $f \colon U \to U$ takové, že pro některé číslo ξ transformace $g = f - \xi \operatorname{id}$ splňuje $g^k = 0$. Výsledky použijeme pro $U = U_i$ a $g = f|_{U_i} - \xi_i \operatorname{id}_{U_i}$, $i = 1, \ldots, s$.

14.2.1. Rozklad na součet cyklických podprostorů

Definice 14.2.1. Transformace $g \colon U \to U$ (resp. čtvercová matice B) se nazývá *nilpotentní*, jestliže existuje celé číslo $k \geq 1$ takové, že $g^k = 0$ (resp. $B^k = 0$).

Cvičení. Transformace g je nilpotentní právě tehdy, když je její matice B (v libovolné bázi) nilpotentní. □

Definice 14.2.2. Podprostor $T \subseteq U$ se nazývá *cyklický* vzhledem k transformaci $g \colon U \to U$, jestliže má bázi $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ takovou, že

$$g(e_1) = e_2, \quad g(e_2) = e_3, \quad \ldots, \quad g(e_{n-1}) = e_n, \quad g(e_n) = 0.$$

Bázi $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ nazýváme *cyklická báze*.

Schematicky,

$$e_1 \xrightarrow[g]{} e_2 \xrightarrow[g]{} \cdots e_{n-1} \xrightarrow[g]{} e_n \xrightarrow[g]{} 0.$$

Definice 14.2.3. Matice

$$J_1(\xi) = (\xi), \quad J_2(\xi) = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 1 & \xi \end{pmatrix}, \quad J_3(\xi) = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 1 & \xi & 0 \\ 0 & 1 & \xi \end{pmatrix},$$

$$J_4(\xi) = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi \end{pmatrix}, \quad \text{atd.}$$

se nazývají *Jordanovy bloky* (též *Jordanovy buňky*).

Tvrzení 14.2.1. *Buď T cyklický podprostor nilpotentní transformace g, buď $f = g + \xi\,\mathrm{id}$. Pak*

(1) T je invariantní vzhledem k lineárním transformacím g i f;
(2) $g|_T$ má v cyklické bázi matici $J_n(0)$;
(3) $f|_T$ má v cyklické bázi matici $J_n(\xi)$.

Důkaz. Cvičení. □

Často se setkáváme s jinou definicí Jordanových buněk — jedničky stojí v řadě těsně *nad* diagonálou. To odpovídá opačnému pořadí vektorů cyklické báze, tj. $(e_n, \dots, e_2, e_1)$.

Lemma 14.2.2. *Buď $h\colon U \to V$ lineární zobrazení mezi konečněrozměrnými vektorovými prostory. Zvolme libovolně bázi v $\operatorname{Ker} h$ a doplňme ji do báze v U nějakými vektory $e_1, \dots, e_m$. Pak vektory $h(e_1), \dots, h(e_m)$ tvoří bázi v $\operatorname{Im} h$.*

Důkaz. Cvičení (viz důkaz formule $\dim U = \dim \operatorname{Ker} h + \dim \operatorname{Im} h$ v Tvrzení 12.2.3). □

Tvrzení 14.2.3. *Buď $g\colon U \to U$ nilpotentní transformace. Pak existují cyklické podprostory $T_1, \dots, T_r \subseteq U$ takové, že $U = T_1 \dot{+} \cdots \dot{+} T_r$.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme uvedením praktického algoritmu pro nalezení cyklických podprostorů a jejich cyklických bází. Popis algoritmu tvoří věty psané kurzívou.

Máme $U = \operatorname{Ker} g^k$ pro jisté k (protože g je nilpotentní). Bez újmy na obecnosti je číslo k minimální, to jest, $g^{k-1} \neq 0$, a tudíž $\operatorname{Ker} g^{k-1} \neq U$.

1. *Zvolíme libovolně bázi v $\operatorname{Ker} g^{k-1}$ a doplníme ji do báze v $U = \operatorname{Ker} g^k$ nějakými vektory $e_1, \dots, e_{m_1}$.*

   Podle lemmatu vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1})$ tvoří bázi v $\operatorname{Im} g^{k-1}$ a jsou tedy lineárně nezávislé. Navíc, jelikož $g^k = 0$, máme $g(e_1), \dots, g(e_{m_1}) \in \operatorname{Ker} g^{k-1}$.

2. *Zvolíme libovolně bázi v $\operatorname{Ker} g^{k-2}$ a přidáme k ní vektory $g(e_1), \dots, g(e_{m_1}) \in \operatorname{Ker} g^{k-1}$.*

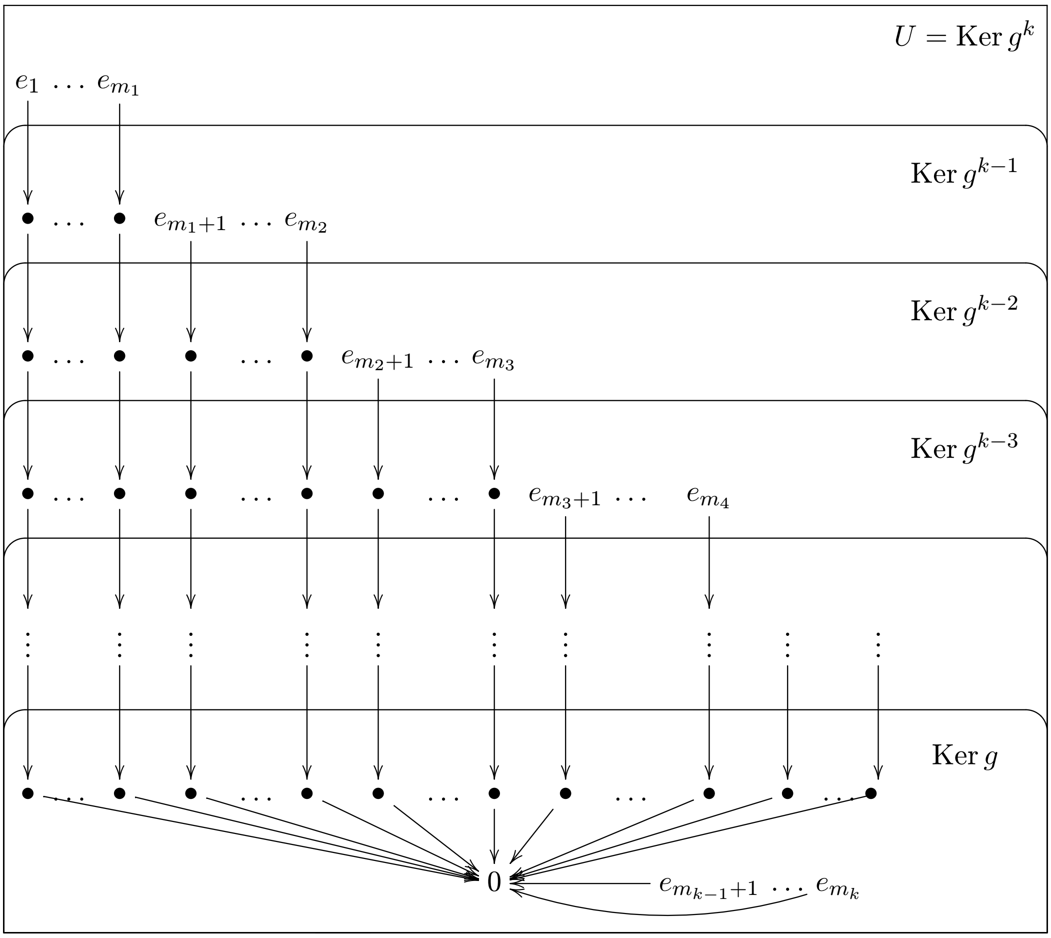
   Tato sestava je lineárně nezávislá. Skutečně, vezměme si lineární kombinaci všech vektorů z této sestavy, která je rovna nulovému vektoru. Máme tedy skaláry $c_1, \dots, c_{m_1}$, takové, že $c_1 g(e_1) + \cdots + c_{m_1} g(e_{m_1}) \in \operatorname{Ker} g^{k-2}$. Pak ovšem $0 = g^{k-2}(c_1 g(e_1) + \cdots + c_{m_1} g(e_{m_1})) = c_1 g^{k-1}(e_1) + \cdots + c_{m_1} g^{k-1}(e_{m_1})$, a tedy $c_1 = \cdots = c_{m_1} = 0$, protože vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1})$ jsou lineárně nezávislé (viz výše). A potom také ostatní koeficienty v uvažované lineární kombinaci jsou nulové, protože příslušné vektory tvoří bázi.

Sestavu doplníme do báze v $\operatorname{Ker} g^{k-1}$ nějakými vektory $e_{m_1+1}, \dots, e_{m_2}$.

   Tím se vlastně báze v $\operatorname{Ker} g^{k-2}$ doplní do báze v $\operatorname{Ker} g^{k-1}$ vektory $g(e_1), \dots, g(e_{m_1}), e_{m_1+1}, \dots, e_{m_2}$. Z lemmatu potom vyplývá, že vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1}), g^{k-2}(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2})$ tvoří bázi v $\operatorname{Im}(g^{k-2}|_{\operatorname{Ker} g^{k-1}})$ a jsou tedy lineárně nezávislé.

3. *Zvolíme libovolně bázi v $\operatorname{Ker} g^{k-3}$ a připojíme k ní vektory $g^2(e_1), \dots, g^2(e_{m_1})$, $g(e_{m_1+1})$, $\dots, g(e_{m_2}) \in \operatorname{Ker} g^{k-2}$.*

Tato sestava je lineárně nezávislá. Skutečně, vezměme si lineární kombinaci všech vektorů z této sestavy, která je rovna nulovému vektoru. Máme tedy skaláry $c_1, \dots, c_{m_1}, c_{m_1+1}, \dots, c_{m_2}$, takové, že $c_1 g^2(e_1) + \cdots + c_{m_1} g^2(e_{m_1}) + c_{m_1+1} g(e_{m_1+1}) + \cdots + c_{m_2} g(e_{m_2}) \in \operatorname{Ker} g^{k-3}$. Pak ovšem $0 = g^{k-3}(c_1 g^2(e_1) + \cdots + c_{m_1} g^2(e_{m_1}) + c_{m_1+1} g(e_{m_1+1}) + \cdots + c_{m_2} g(e_{m_2})) = c_1 g^{k-1}(e_1) + \cdots + c_{m_1} g^{k-1}(e_{m_1}) + c_{m_1+1} g^{k-2}(e_{m_1+1}) + \cdots + c_{m_2} g^{k-2}(e_{m_2})$, a tedy $c_1 = \cdots = c_{m_1} = c_{m_1+1} = \cdots = c_{m_2} = 0$, protože vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1}), g^{k-2}(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2})$ jsou lineárně nezávislé (viz výše). A potom také ostatní koeficienty v uvažované lineární kombinaci jsou nulové, protože příslušné vektory tvoří bázi.



Sestavu doplníme do báze v $\operatorname{Ker} g^{k-2}$ *nějakými vektory* $e_{m_2+1}, \dots, e_{m_3}$.

Tím jsme tedy bázi v $\operatorname{Ker} g^{k-3}$ doplnili do báze v $\operatorname{Ker} g^{k-2}$ vektory $g^2(e_1), \dots, g^2(e_{m_1}), g(e_{m_1+1}), \dots, g(e_{m_2}), e_{m_2+1}, \dots, e_{m_3}$. A potom vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1}), g^{k-2}(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2}), g^{k-3}(e_{m_2+1}), \dots, g^{k-3}(e_{m_3})$ tvoří podle lemmatu bázi v $\operatorname{Im}(g^{k-3}|_{\operatorname{Ker} g^{k-2}})$ a jsou tedy lineárně nezávislé.

Podobných kroků provedeme k (v posledním kroku doplňujeme bázi podprostoru $\operatorname{Ker} g^0 = \operatorname{Ker} \mathrm{id} = \{0\}$ do báze v podprostoru $\operatorname{Ker} g$).

Z uvedeného postupu vyplývá, že celkově získáme bázi

$$
\begin{aligned}
&e_1, \dots, e_{m_1},\\
&g(e_1), \dots, g(e_{m_1}), e_{m_1+1}, \dots, e_{m_2},\\
&g^2(e_1), \dots, g^2(e_{m_1}), g(e_{m_1+1}), \dots, g(e_{m_2}), e_{m_2+1}, \dots, e_{m_3},\\
&\dots\\
&g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1}), g^{k-2}(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2}),\\
&\qquad g^{k-3}(e_{m_2+1}), \dots, g^{k-3}(e_{m_3}), \dots, e_{m_{k-1}+1}, \dots, e_{m_k}
\end{aligned}
$$

v prostoru U. Podprostory

$$
\begin{aligned}
&[\![e_1, g(e_1), \dots, g^{k-1}(e_1)]\!], \dots, [\![e_{m_1}, g(e_{m_1}), \dots, g^{k-1}(e_{m_1})]\!],\\
&[\![e_{m_1+1}, g(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_1+1})]\!], \dots, [\![e_{m_2}, g(e_{m_2}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2})]\!],\\
&\dots\\
&[\![e_{m_{k-1}+1}]\!], \dots, [\![e_{m_k}]\!]
\end{aligned}
$$

jsou pak cyklické podprostory s příslušnými cyklickými bázemi.

Označíme-li počet těchto cyklických podprostorů $r := \sum_{j=1}^{k} m_j$ a jednotlivé podprostory T_i pro $i = 1, \dots, r$, dostáváme $U = T_1 + \dots + T_r$. Jelikož $\dim T_1 + \dots + \dim T_r = \dim(T_1 + \dots + T_r)$, podle Tvrzení 11.3.3 se jedná o přímý součet podprostorů. $\square$

Nalezli jsme cyklické podprostory a v každém z nich cyklickou bázi. Situaci můžeme znázornit diagramem, jehož vrcholy jsou vektory cyklických bází a šipky znamenají zobrazení g:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & & & & & & & & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & & & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}
\tag{10}
$$

Sloupky znamenají jednotlivé cyklické podprostory. Vektory spodní řady se zobrazují na nulový vektor. Tvoří vlastně bázi v $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker}(f - \xi\,\mathrm{id}) = V_\xi$, což je prostor vlastních vektorů s vlastním číslem ξ. Tudíž, počet sloupků = počet cyklických podprostorů = $\dim V_\xi$.

Vektory dolních j řádků tvoří bázi v $\operatorname{Ker} g^j$. V j-tém řádku zdola je proto právě

$$
n_j = \dim \operatorname{Ker} g^j - \dim \operatorname{Ker} g^{j-1} = \sum_{i=1}^{k+1-j} m_i \tag{11}
$$

bodů, kde m_i jsou koeficienty z důkazu předchozího tvrzení. Čísla $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$ jednoznačně určují délky řádků diagramu, a tím i počty cyklických podprostorů příslušných dimenzí.

Formule (11) ukazuje, že čísla $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$ závisí jen a jen na nilpotentní transformaci g a nikoliv na konkrétním postupu, kterým byly získány jednotlivé cyklické báze. Jsou to *invarianty lineární transformace g*.

Důsledek. *Buď $g\colon U \to U$ nilpotentní transformace. Pak existuje báze prostoru U taková, že*

(1) transformace g má blokově diagonální matici, která je přímým součtem Jordanových bloků $J_s(0)$;

(2) transformace $f = g + \xi\,\mathrm{id}$ má blokově diagonální matici, která je přímým součtem Jordanových bloků $J_s(\xi)$.

Důkaz. Báze sestavená z cyklických bází cyklických podprostorů v důkazu předchozího tvrzení má požadované vlastnosti. □

Příklad. Uvažujme lineární transformaci $\mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$, $v \mapsto Av$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -4 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Anulující polynom nejmenšího stupně je $x^3+6x^2+12x+8 = (x+2)^3$, s jediným kořenem -2, což je současně jediná vlastní hodnota matice A. První rozklad má proto jediného sčítance $U = \mathbb{C}^5$ a

$$B = A + 2E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

je nilpotentní matice, $B^3 = 0$. Spočítáme

$$B^2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

načež $\operatorname{Ker} B^2 = [\![(5,0,0,0,-4),(0,5,0,0,-1),(0,0,5,0,-2),(0,0,0,5,4)]\!]$. Tento čtyřrozměrný podprostor můžeme doplnit do báze v $\mathbb{C}^5$ libovolným vektorem, který v něm neleží, zvolme například

$$e_1 = (0,0,0,0,1).$$

Tím je ukončen první krok. Ve druhém kroku spočítáme

$$\operatorname{Ker} B = [\![(1,0,0,1,0),(0,-5,1,-2,-1)]\!],$$

a přidáme vektor

$$Be_1 = (0,0,3,4,2).$$

Získanou sestavu tří lineárně nezávislých vektorů je třeba doplnit do báze ve čtyřrozměrném $\operatorname{Ker} B^2$ jedním vektorem; zvolme například

$$e_2 = (0,0,0,5,4)$$

(mohli jsme zvolit kterýkoliv ze shora uvedených generátorů podprostoru $\operatorname{Ker} B^2$). Tím je ukončen druhý krok. Ve třetím kroku je $\operatorname{Ker} B^0 = \operatorname{Ker} E = 0$ a doplňujeme tedy dva vektory

$$B^2 e_1 = (-5,0,0-5,0) \quad \text{a} \quad Be_2 = (-10,15,-3,-4,3)$$

do báze v dvojrozměrném $\operatorname{Ker} B$, což ovšem nevyžaduje žádný doplňující vektor a jsme hotovi.

Hledaná báze prostoru $\mathbb{C}^5$ je proto $(e_1, Be_1, B^2e_1, e_2, Be_2)$. Příslušný diagram je

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[d] & \\ \bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet & \bullet \end{tikzcd}$$

a jeho dva sloupky odpovídají dvěma Jordanovým blokům rozměrů 3 a 2. Dostáváme blokově diagonální matice

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} -2&0&0&0&0\\ 1&-2&0&0&0\\ 0&1&-2&0&0\\ 0&0&0&-2&0\\ 0&0&0&1&-2 \end{pmatrix}$$

(při obráceném pořadí vektorů v cyklických bázích by jedničky stály nad diagonálou; odlišné může být i pořadí Jordanových bloků). □

14.2.2. Druhý rozklad a Jordanův tvar matice

Vraťme se nyní k obecné transformaci $f\colon V \to V$ a prvnímu rozhladu $V = U_1 \dot{+} \cdots \dot{+} U_s$ podle některého anulujícího polynomu. Pro každý z prostorů U_l, $l = 1, \ldots, s$ dostáváme rozklad na cyklické podprostory $T_{l,i}$, kde $i = 1, \ldots, k_l$, celkem tedy

$$V = T_{1,1} \dot{+} \cdots \dot{+} T_{1,k_1} \dot{+} \cdots \dot{+} T_{s,1} \dot{+} \cdots \dot{+} T_{s,k_s}.$$

Definice 14.2.4. Tento rozklad je *druhý rozklad* prostoru lineární transformace.

Připomeňme, že cyklické podprostory $T_{i,j}$ jsou invariantní a zobrazení $f|_{T_{i,j}}$ mají v cyklické bázi matici tvaru $J_r(\xi)$, $r = \dim T_{i,j}$.

Definice 14.2.5. Matice, která je přímým součtem Jordanových bloků, je *matice v Jordanově tvaru.*

Příklad. Matice

$$\left(\begin{array}{ccccccc||cccccc}
2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&2&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&2&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&2&0&0&0&0&0&0\\
\hline\hline
0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&3&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&3&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3
\end{array}\right)$$

je v Jordanově tvaru. Bloky prvního rozkladu jsou vyznačeny dvojitou čarou. Blokům druhého rozkladu odpovídají diagramy

$$\begin{array}{ccc} \bullet & & \\ \downarrow & & \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \quad \text{resp.} \quad \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & & \\ \downarrow & \downarrow & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

Šipky zde znamenají zobrazení $f - 2\,\mathrm{id}$ resp. $f - 3\,\mathrm{id}$. Délky spodních řádků jsou dimenze prostorů vlastních vektorů s vlastními hodnotami 2 resp. 3. □

Důsledek. *Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace. Pak existuje báze prostoru V, vzhledem k níž f má matici v Jordanově tvaru.*

Definice 14.2.6. Báze z předchozího důsledku je *Jordanova báze* a získáme ji sjednocením cyklických bází v jednotlivých cyklických podprostorech $T_{i,j}$.

Při praktickém převodu na Jordanův tvar nejdříve nalezneme invariantní podprostory $U = \operatorname{Ker} g^k = \operatorname{Ker}(f - \xi \operatorname{id})^k$ prvního rozkladu, pro každou vlastní hodnotu ξ zvlášť. V každém z nich pak hledáme cyklické podprostory a cyklické báze postupem uvedeným v důkazu Tvrzení 14.2.3.

Zbývá rozhodnout, nakolik je Jordanův tvar matice lineární transformace určen jednoznačně. Postup k nalezení Jordanovy báze, který jsme popsali, udává jednoznačně všechny Jordanovy buňky $J_r(\xi)$. Čísla ξ probíhají všechny vlastní hodnoty, rozměr r je určen prostřednictvím diagramů (10) a počet buněk s daným rozměrem je určen prostřednictvím čísel $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k$, která jsou zase jednoznačně určena formulemi (11), kde $g = f - \xi \operatorname{id}$. Neurčeno pak zůstává pouze pořadí Jordanových buněk.

Cvičení. Spočtěte Jordanův tvar transponované matice A^{T}. (Výsledek: je týž.) □

14.2.3. Minimální polynom

Minimální polynom můžeme jednoduše stanovit z Jordanova tvaru jako polynom

$$(x - \xi_1)^{\mu_1} \cdots (x - \xi_s)^{\mu_s},$$

kde $\xi_1, \ldots, \xi_s$ jsou vlastní hodnoty lineární transformace, resp. matice a $\mu_1, \ldots, \mu_s$ jsou výšky (maximální délky sloupků) diagramů (10) pro jednotlivé vlastní hodnoty $\xi_1, \ldots, \xi_s$. (Dokažte jako cvičení.)

Příklad. Matice z posledního příkladu má minimální polynom $(x - 2)^3(x - 3)^2$. □

14.3. Jordanův tvar matice a kritérium podobnosti matic

Připomeňme, že dvě čtvercové matice A, B jsou podobné, jestliže existuje invertibilní matice Q taková, že $B = QAQ^{-1}$. Zapisujeme $A \approx B$. Dále připomeňme, že matice jedné a téže lineární transformace v různých bázích jsou si podobné (maticí Q je v tomto případě matice přechodu mezi bázemi).

Tvrzení 14.3.1. *Každá čtvercová komplexní matice je podobná matici v Jordanově tvaru.*

Důkaz. Buď A čtvercová komplexní matice typu $n \times n$. Potom A je maticí lineární transformace $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $u \mapsto Au$. V Jordanově bázi má transformace f matici B v Jordanově tvaru. Pak $B \approx A$. □

Definice 14.3.1. Matice B z předchozího důkazu je *Jordanův tvar matice A*.

Jordanův tvar je určen jednoznačně až na pořadí bloků a rozhoduje o podobnosti matic:

Tvrzení 14.3.2. *Matice jsou si podobné právě tehdy, když mají stejný Jordanův tvar až na pořadí Jordanových bloků.*

Důkaz. Jsou-li si matice A', A'' podobné, pak zobrazení $u \mapsto A'u$, $u \mapsto A''u$ mají stejné charakteristické polynomy, stejné vlastní hodnoty a stejné jsou i dimenze a počty invariantních podprostrorů určené diagramy (10) a formulemi (11) (cvičení). Proto jsou stejné i Jordanovy tvary.

Naopak, buďte $B' \approx A'$ a $B'' \approx A''$ Jordanovy tvary matic A' a A''. Jestliže se B' a B'' liší jen pořadím Jordanových bloků, pak jsou si podobné (cvičení), načež $A' \approx B' \approx B'' \approx A''$. □

Cvičení. Dokažte, že pro libovolnou čtvercovou matici platí $A \approx A^{\mathsf{T}}$.
Návod: Dokažte postupně

(i) $J \approx J^{\mathsf{T}}$ pro libovolnou Jordanovu matici J (stačí zpřeházet vektory v Jordanově bázi);

(ii) je-li $A \approx J$, pak $A^{\mathsf{T}} \approx J^{\mathsf{T}}$. □