7. přednáška, 4. 4. 2023

13. Vlastní vektory

Mějme lineární transformaci $f\colon V \to V$ a její matici A vzhledem k nějaké bázi. Obraz vektoru v při lineární transformací f^n můžeme najít tak, že spočteme jeho souřadnice, a to tak že souřadnice vektoru v vynásobíme maticí A^n, protože to je matice transformace f^n (vše samozřejmě vzhledem ke zvolené bázi). Je tedy žádoucí volit bázi prostoru tak, aby matice transformace byla co nejjednodušší, pokud možno diagonální, protože potom se její mocnina počítá velice jednoduše.

13.1. Definice, příklady

Při lineární transformaci $f\colon V \to V$ se každý vektor z prostoru V zobrazí na některý vektor opět z prostoru V. Může se tedy stát, že vektor se zobrazí na nějaký svůj skalární násobek.

Definice 13.1.1. Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace vektorového prostoru V nad polem P. Skalár $\lambda \in P$ je *vlastní hodnota* (v případě číselného pole P (podpole pole $\mathbb{C}$) *vlastní číslo*) transformace f, jestliže existuje nenulový vektor $v \in V$ takový, že

$$f(v) = \lambda v.$$

Každý vektor $v \in V$ takový, že $f(v) = \lambda v$, kde λ je vlastní hodnota transformace f, je *vlastní vektor* transformace f příslušný vlastní hodnotě λ.

Analogicky jsou definovány vlastní vektory a vlastní hodnoty (čísla) čtvercové matice.

Definice 13.1.2. Buď A čtvercová matice řádu n nad polem P. Skalár $\lambda \in P$ je *vlastní hodnota* (*vlastní číslo*) matice A, jestliže existuje nenulový vektor (uspořádaná n-tice, sloupková matice) $x \in P^n$ takový, že

$$Ax = \lambda x.$$

Každý vektor $x \in P^n$ takový, že $Ax = \lambda x$, kde λ je vlastní hodnota matice A, je *vlastní vektor* matice A příslušný vlastní hodnotě λ.

Tedy, aby skalár λ byl vlastní hodnota, musí existovat nenulový vektor, který se zobrazí na svůj λ-násobek. Potom i nulový vektor je vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě λ.

Příklad. (1) Je-li V netriviální prostor (obsahuje nenulový vektor), pak pro identickou transformaci $\mathrm{id}\colon V \to V$, $\mathrm{id}(v) = v$, každý vektor $v \in V$ je vlastní s vlastní hodnotou 1, protože $\mathrm{id}(v) = 1 \cdot v$.

(2) Je-li V netriviální prostor, pak pro nulovou transformaci $0\colon V \to V$, $0(v) = 0$, každý vektor $v \in V$ je vlastní s vlastní hodnotou 0, protože $0(v) = 0 \cdot v$.

(3) Je-li V netriviální prostor a c skalár, pak pro transformaci $f_c\colon V \to V$, $f_c(v) = cv$, každý vektor $v \in V$ je vlastní s vlastní hodnotou c.

(4) Pro rovnoběžné promítání $E^3 \to E^3$ podél vektoru $v \neq 0$ na rovinu $U \subset E^3$ procházející počátkem, kde $v \notin U$, vektor v a všechny jeho násobky jsou vlastní vektory s vlastním číslem 0, každý vektor z U je vlastní vektor s vlastním číslem 1 a jiné vlastní vektory tato transformace nemá.

(5) Pro rotaci $E^2 \to E^2$ o úhel $0 \leq \varphi < 2\pi$:
(a) je-li $\varphi = 0$, pak jde o identickou transformaci a každý vektor je vlastní s vlastním číslem 1;
(b) je-li $\varphi = \pi$, pak jde o středovou symetrii $v \mapsto -v = (-1)v$ a každý vektor je vlastní s vlastním číslem -1;
(c) v ostatních případech neexistuje žádný vlastní vektor.

(6) Rotace $E^3 \to E^3$ o úhel $0 \leq \varphi < 2\pi$ kolem zvolené pevné osy L procházející počátkem. Označme $L^\perp$ rovinu procházející počátkem kolmo k L (tzv. ortogonální doplněk).
(a) Je-li $\varphi = 0$, pak jde o identickou transformaci a každý vektor je vlastní s vlastním číslem 1;
(b) je-li $\varphi = \pi$, pak každý vektor z L je vlastní s vlastním číslem 1, každý vektor z $L^\perp$ je vlastní s vlastním číslem -1 a žádný jiný vlastní vektor tato transformace nemá;
(c) v ostatních případech každý vektor z L je vlastní vektor s vlastním číslem 1 a žádný jiný vlastní vektor neexistuje.

(7) Buď V vektorový prostor všech hladkých funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mají spojité derivace všech řádů) a buď $\delta\colon V \to V$, $\delta(f) = f'$ transformace, která funkci f přiřadí její derivaci f'. Z matematické analýzy víme, že pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R}$ platí $(\mathrm{e}^{\lambda x})' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$, čili funkce $\mathrm{e}^{\lambda x}$ a každý její skalární násobek jsou vlastní vektory transformace δ s vlastním číslem λ.

Buď $f \in V$ libovolná funkce s vlastností $f' = \lambda f$. Potom

$$\begin{aligned}(f(x)\mathrm{e}^{-\lambda x})' &= f'(x)\mathrm{e}^{-\lambda x} - f(x)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} = \\ &= \lambda f(x)\mathrm{e}^{-\lambda x} - f(x)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} = \\ &= \lambda f(x)(\mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x}) = 0,\end{aligned}$$

čili funkce $f(x)\mathrm{e}^{-\lambda x}$ je konstantní. Označíme-li $f(x)\mathrm{e}^{-\lambda x} = c$, dostaneme $f(x) = c\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, takže každá funkce s vlastností $f' = \lambda f$ je skalární násobek funkce $\mathrm{e}^{\lambda x}$. To znamená, že každé reálné číslo λ je vlastní číslo transformace δ a příslušné vlastní vektory jsou všechny skalární násobky funkce $\mathrm{e}^{\lambda x}$. □

Cvičení. Určete všechny vlastní vektory následujících lineárních transformací vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$. Návod: Pomozte si geometrickou interpretací v Gaussově rovině.

(1) Zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^*$, kde z^* je číslo komplexně sdružené k číslu z.
(2) Zobrazení $\mathrm{re}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \mathrm{re}\, z = \frac{1}{2}(z + z^*)$ (reálná část čísla z). □

13.2. Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů

Tvrzení 13.2.1. *Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace. Potom*

(1) skalár λ je vlastní hodnota transformace f právě tehdy, když $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ není injektivní;
(2) množina všech vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě λ transformace f je podprostor prostoru V.

Důkaz. Buďte $v \in V$ a λ skalár. Následující vztahy jsou ekvivalentní:

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda v \\ f(v) - \lambda v &= 0 \\ f(v) - (\lambda\,\mathrm{id}_V)(v) &= 0 \\ (f - \lambda\,\mathrm{id}_V)(v) &= 0 \\ v &\in \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)\end{aligned}$$

Takže λ je vlastní hodnota právě tehdy, když v $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_V)$ existuje nenulový vektor, což podle Tvrzení 12.2.2 je právě tehdy, když $f - \lambda \operatorname{id}_V$ není injektivní.

Z uvedeného navíc vyplývá, že množina všech vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě λ transformace f je $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_V)$, což je podprostor prostoru V. □

Obdobné trvrzení platí i pro vlastní hodnoty a vlastní vektory matice.

Tvrzení 13.2.2. *Buď A matice typu $n \times n$ nad polem P. Potom*

(1) skalár λ je vlastní hodnota matice A právě tehdy, když $\det(A - \lambda E_n) = 0$;
(2) množina všech vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě λ matice A je podprostor prostoru P^n.

Důkaz. Buďte $x \in P^n$ a λ skalár. Následující vztahy jsou ekvivalentní:

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ Ax - \lambda x &= 0 \\ Ax - \lambda E_n x &= 0 \\ (A - \lambda E_n)x &= 0 \\ x &\in \operatorname{Ker}(A - \lambda E_n) \end{aligned}$$

Takže λ je vlastní hodnota právě tehdy, když v $\operatorname{Ker}(A - \lambda E_n)$ existuje nenulový vektor, tedy homogenní soustava $(A - \lambda E_n)x = 0$ má nenulové řešení, a to má právě tehdy, když $\det(A - \lambda E_n) = 0$, čili matice $A - \lambda E_n$ je singulární.

Z uvedeného navíc vyplývá, že množina všech vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě λ matice A je množina všech řešení homogenní soustavy rovnic o n neznámých, což je podprostor prostoru P^n. □

Tvrzení 13.2.3. *Buď A matice typu $n \times n$ nad polem P. Potom $\det(A - \lambda E_n)$ je polynom neurčité λ stupně n s koeficienty z pole P.*

Důkaz. Cvičení. □

Tvrzení 13.2.4. *Matice typu $n \times n$ má nejvýše n vlastních hodnot.*

Důkaz. Vlastní hodnoty jsou kořeny polynomu $\det(A - \lambda E_n)$ stupně n a polynom stupně n má nejvýše n kořenů. □

Definice 13.2.1. Buď A čtvercová matice. Polynom

$$\chi_A = \det(A - \lambda E)$$

je *charakteristický polynom* matice A a rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

je *charakteristická rovnice* matice A.

Cvičení. Buď $\chi_A = c_n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_0$ charakteristický polynom matice A typu $n \times n$. Ukažte, že $c_n = (-1)^n$, $c_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$ a $c_0 = \det A$. □

Podle Tvrzení 13.2.2 je λ vlastní hodnota matice A právě tehdy, když je kořenem příslušného charakteristického polynomu. Vlastní vektory příslušné vlastní hodnotě λ získáme jako řešení soustavy lineárních rovnic $(A - \lambda E)x = 0$.

Pro lineární zobrazení $f\colon U \to V$, bázi $u = (u_1, \ldots, u_n)$ prostoru U a bázi $v = (v_1, \ldots, v_m)$ prostoru V máme definovánu matici zobrazení f vzhledem k bázím u a v. Jedná-li se o lineární transformaci f, tedy $U = V$, a stejné báze, tedy $u = v$, budeme příslušnou matici stručněji nazývat *matice lineární transformace f vzhledem k bázi v*.

Vlastní hodnoty lineární transformace můžeme hledat jako vlastní hodnoty matice transformace.

Tvrzení 13.2.5. *Buďte V konečněrozměrný vektorový prostor nad polem P, $f\colon V \to V$ lineární transformace a A matice transformace f vzhledem k nějaké bázi prostoru V. Potom $\lambda \in P$ je vlastní hodnota transformace f právě tehdy, když λ je vlastní hodnota matice A.*

Důkaz. Tvrzení vyplývá z toho, že vektorům z V jsou jednoznačně přiřazeny jejich souřadnice (zobrazení přiřazující vektorům jejich souřadnice je izomorfismus), transformace f je určena svou maticí A a souřadnice obrazu $f(v)$ vektoru v o souřadnicích x jsou rovny součinu matic Ax, vše vzhledem k jedné bázi. □

Vlastní hodnoty lineární transformace f tedy získáváme jako vlastní hodnoty matice A transformace f vzhledem k nějaké bázi, tedy jako kořeny charakteristického polynomu matice A. Při volbě jiné báze dostaneme jinou matici A' transformace f, jejíž vztah k A je $A' = QAQ^{-1}$, kde Q je matice přechodu mezi bázemi. Je otázkou, zda matice A a A' mají stejné charakteristické polynomy a tedy stejné vlastní hodnoty.

Definice 13.2.2. Buďte A, B čtvercové matice. Matice B je *podobná* matici A, jestliže existuje invertibilní matice Q taková, že $B = QAQ^{-1}$. Zapisujeme $B \approx A$.
Zobrazení $A \mapsto QAQ^{-1}$ se nazývá *podobnostní transformace.*

Cvičení. Dokažte, že relace $\approx$ je relace ekvivalence. □

Tvrzení 13.2.6. *Podobné matice mají stejné charakteristické polynomy.*

Důkaz. Nechť $B = QAQ^{-1}$. Potom

$$\begin{aligned}\chi_B &= \det(B - \lambda E) = \det(QAQ^{-1} - \lambda E) = \det(QAQ^{-1} - Q\lambda E Q^{-1}) = \\ &= \det(Q(A - \lambda E)Q^{-1}) = \det Q \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det Q^{-1} = \\ &= \det Q \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \frac{1}{\det Q} = \det(A - \lambda E) = \chi_A.\end{aligned}$$ □

Díky předchozímu tvrzení můžeme pomocí charakteristického polynomu matice definovat charakteristický polynom lineární transformace konečněrozměrného prostoru.

Definice 13.2.3. Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace konečněrozměrného vektorového prostoru V. *Charakteristický polynom* χ_f transformace f je roven charakteristickému polynomu χ_A matice A transformace f vzhledem k libovolné bázi.

Díky Tvrzení 13.2.6 je předchozí definice korektní a kořeny charakteristického polynomu transformace f jsou všechny vlastní hodnoty transformace f.

Tvrzení 13.2.7. *Lineární transformace n-rozměrného vektorového prostoru má nejvýše n vlastních hodnot.*

Důkaz. Charakteristický polynom je stupně n a má tedy nejvýše n kořenů. □

Definice 13.2.4. Nechť f (resp. A) je lineární transformace konečněrozměrného vektorového prostoru (resp. čtvercová matice) a λ je její vlastní hodnota.
Algebraická násobnost vlastní hodnoty λ je její násobnost jako kořene charakteristického polynomu transformace f (resp. matice A).
Geometrická násobnost vlastní hodnoty λ je dimenze podprostoru vlastních vektorů transformace f (resp. matice A) příslušných vlastní hodnotě λ.