5. přednáška, 21. 3. 2023

12. Lineární zobrazení

12.1. Definice, příklady

Definice 12.1.1. Buďte U, V vektorové prostory nad polem P. Zobrazení $f\colon U \to V$ se nazývá *lineární*, přesněji *lineární nad polem P*, nebo *homomorfismus vektorových prostorů*, jestliže pro každé vektory $u, u_1, u_2 \in U$ a každý skalár $p \in P$ platí

(i) $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$ (aditivita)

(ii) $f(pu) = pf(u)$. (homogenita)

Příklad. (1) Identické zobrazení $\mathrm{id}\colon U \to U$, $\mathrm{id}(a) = a$, je lineární.

(2) Nulové zobrazení $0\colon U \to U$, $0(a) = 0$, je lineární.

(3) Násobení skalárem $c \in P$: Zobrazení $f_c\colon U \to U$, $f_c(a) = ca$, je lineární. Nazývá se *homotetie*. Všimněte si, že předchozí dva příklady jsou speciální případy pro $c = 1$, resp. $c = 0$.

(4) Zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je lineární nad $\mathbb{R}$ právě tehdy, když existuje skalár $c \in \mathbb{R}$ takový, že $f(a) = ca$. Dokažte. Návod: Položte $c = f(1)$.

(5) Zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (3x + 2y + z, x - y)$, je lineární. Ověřte.

(6) Zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y) \mapsto (x + y, x, x - y, y)$, je lineární. Ověřte.

(7) Buď A matice typu $m \times n$ nad polem P. Nechť $f_A\colon P^n \to P^m$ je zobrazení takové, že $f_A(x) = Ax$ (přesněji tedy $f_A\colon P^{n\times 1} \to P^{m\times 1}$). Čili, obraz n-tice $x = (x^1, \dots, x^n)$ je lineární kombinace sloupků matice A s koeficienty $x^1, \dots, x^n$,

$$f_A(x) = x^1 A_1^\circ + x^2 A_2^\circ + \cdots + x^n A_n^\circ.$$

Potom f_A je lineární zobrazení.

(8) Zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^*$, kde z^* je číslo komplexně sdružené k číslu $z \in \mathbb{C}$, je lineární zobrazení vektorových prostorů nad $\mathbb{R}$. Toto zobrazení není lineární zobrazení nad $\mathbb{C}$. Ověřte.

(9) Zobrazení $\mathrm{re}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \mathrm{re}\, z = \frac{1}{2}(z + z^*)$ (reálná část čísla z) je lineární zobrazení vektorových prostorů nad $\mathbb{R}$.

(10) Je-li $U \subseteq V$ podprostor, pak vložení $\iota_U\colon U \to V$, $\iota_U(u) = u$, je lineární zobrazení.

(11) Otáčení. Při otáčení Eukleidovské roviny kolem pevného bodu o úhel α se všechny vektory otáčejí o týž úhel α, nezávisle na jejich umístění. Vzniká zobrazení $\phi_\alpha\colon E^2 \to E^2$.

Otáčení převádí součet vektorů na součet vektorů a podobně c-násobek vektoru na c-násobek vektoru. Například aditivita se velmi názorně ověří poukazem na to, že otáčením kolem vrcholu se rovnoběžník převádí v rovnoběžník a délka jeho stran a úhlopříček se přitom nemění.

Podobně otáčení kolem pevné osy v trojrozměrném Eukleidovském prostoru představuje lineární zobrazení vektorů $E^3 \to E^3$.

(12) Rotace $E^3 \to E^3$.

(13) Rovnoběžné promítání. Promítání Eukleidovského prostoru E^3 do 2-rozměrného podprostoru (průmětny) R ve zvoleném směru L je zobrazení $E^3 \to R$. Směrem se rozumí libovolný 1-rozměrný podprostor L takový, že $E^3 = L \dotplus R$. Průmět do roviny R je sčítanec x_R v (jednoznačném) vyjádření $x = x_L + x_R$, kde $x_L \in L$ a $x_R \in R$.

Promítání $p\colon E^3 \to R$ je lineární zobrazení. Aditivita se projevuje v tom, že průmětem rovnoběžníka je rovnoběžník.

(14) Projekce na přímku L procházející počátkem $E^2 \to L$.

(15) Osová souměrnost podle přímky procházející počátkem, $E^2 \to E^2$ i $E^3 \to E^3$.

(16) Zobrazení $U \to P^{\dim U}$ přiřazující vektorům jejich souřadnice vzhledem ke zvolené bázi, viz Tvrzení 10.4.4.

(17) Zobrazení $P^{n\times n} \to P$, $A \mapsto \operatorname{tr} A$, přiřazující matici A typu $n \times n$ nad polem P její stopu $\operatorname{tr} A = \sum_i A_i^i$ (součet prvků na diagonále).

(18) Zobrazení $P[x] \to P[x]$, kde $P[x]$ je prostor polynomů, přiřazující polynomu jeho derivaci. Derivace může být například i zobrazení $P_n[x] \to P_{n-1}[x]$, nebo zobrazení z prostoru diferencovatelných funkcí do prostoru všech funkcí.

(19) Zobrazení z prostoru všech integrovatelných funkcí na uzavřeném intervalu do $\mathbb{R}$ přiřazující funkci její určitý integrál. □

Cvičení. Ukažte, že lineární zobrazení $U \to V$ je homomorfismus abelovských grup $(U, +, 0, -) \to (V, +, 0, -)$. Speciálně, $f(0) = 0$, $f(-a) = -f(a)$. □

Cvičení. Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení. Matematickou indukcí ukažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $u_1, \dots, u_n \in U$ a skaláry $p_1, \dots, p_n$ platí

$$f(p_1u_1 + \cdots + p_nu_n) = p_1f(u_1) + \cdots + p_nf(u_n),$$

tedy obraz lineární kombinace je lineární kombinace obrazů. □

Lineární zobrazení je jednoznačně určeno obrazy vektorů libovolné báze:

Tvrzení 12.1.1. *Buďte U, V vektorové prostory nad polem P, $(u_1, \dots, u_n)$ báze U. Pak pro každou n-tici $v_1, \dots, v_n \in V$ existuje právě jedno lineární zobrazení $f\colon U \to V$ takové, že $f(u_1) = v_1, \dots, f(u_n) = v_n$.*

Důkaz. Buďte $v_1, \dots, v_n \in V$. Pro $u \in U$ existují $x_1, \dots, x_n \in P$ tak, že $u = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n$. Položme $f(u) = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$. Cvičení: ověřte, že $f(u_i) = v_i$, f je lineární a je-li f' zobrazení s těmito vlastnostmi, potom $f' = f$. □

Tvrzení 12.1.2. *Buďte $f\colon U \to V$ a $g\colon V \to W$ lineární zobrazení. Pak $g \circ f\colon U \to W$ je lineární zobrazení.*

Důkaz. Buďte U, V, W vektorové prostory nad polem P. Pro libovolná $u_1, u_2 \in U$ máme

$$\begin{aligned}(g \circ f)(u_1 + u_2) &= g(f(u_1 + u_2)) = \\ &= g(f(u_1) + f(u_2)) = \\ &= g(f(u_1)) + g(f(u_2)) = \\ &= (g \circ f)(u_1) + (g \circ f)(u_2).\end{aligned}$$

Pro libovolné $u \in U$ a $p \in P$ máme

$$\begin{aligned}(g \circ f)(pu) &= g(f(pu)) = \\ &= g(pf(u)) = \\ &= pg(f(u)) = \\ &= p(g \circ f)(u).\end{aligned}$$

□

12.2. Jádro a obraz

Definice 12.2.1. Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení. Označme

$$\operatorname{Ker} f = \{u \in U \mid f(u) = 0\},$$
$$\operatorname{Im} f = f(U) = \{f(u) \mid u \in U\}.$$

$\operatorname{Ker} f$ se nazývá *jádro* a $\operatorname{Im} f$ se nazývá *obraz* lineárního zobrazení f.

Tvrzení 12.2.1. *Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení. Pak*

(1) $\operatorname{Ker} f$ *je podprostor* U*,*
(2) $\operatorname{Im} f$ *je podprostor* V*.*

Důkaz. (1) (i) $0 \in \operatorname{Ker} f$, protože $f(0) = 0$, (ii) Nechť $a, b \in \operatorname{Ker} f$. Pak $a + b \in \operatorname{Ker} f$, protože $f(a+b) = f(a)+f(b) = 0+0 = 0$. (iii) Nechť $a \in \operatorname{Ker} f$, $r \in P$. Pak $ra \in \operatorname{Ker} f$, protože $f(ra) = rf(a) = r \cdot 0 = 0$.

(2) (i) $0 \in \operatorname{Im} f$, protože $f(0) = 0$, (ii) Nechť $a, b \in \operatorname{Im} f$, tedy existují $c, d \in U$ takové, že $f(c) = a$ a $f(d) = b$. Pak $a + b \in \operatorname{Im} f$, protože $f(c + d) = f(c) + f(d) = a + b$. (iii) Nechť $a \in \operatorname{Im} f$, $r \in P$, tedy existuje $b \in U$ takové, že $f(b) = a$. Pak $ra \in \operatorname{Im} f$, protože $f(rb) = rf(b) = ra$. □

Cvičení. (1) Pro lineární zobrazení re z příkladu (9) platí:

$$\operatorname{Im} \mathrm{re} = \mathbb{R}, \qquad \operatorname{Ker} \mathrm{re} = \mathbb{R}\mathrm{i} = \{r\mathrm{i} \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

(2) Při rovnoběžném promítání $p\colon E^3 \to E^2$ je podprostor $\operatorname{Ker} p$ totožný se směrem promítání, kdežto $\operatorname{Im} p = E^2$.

(3) Při otáčení $\phi_\alpha\colon E^2 \to E^2$ o úhel $\alpha \neq 2k\pi$ je $\operatorname{Im} \phi_\alpha = E^2$, zatímco $\operatorname{Ker} \phi_\alpha$ je nulový podprostor. □

Tvrzení 12.2.2. *Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení. Pak*

(1) f je injektivní právě tehdy, když $\operatorname{Ker} f = 0$*,*
(2) f je surjektivní právě tehdy, když $\operatorname{Im} f = V$*.*

Důkaz. (1) Buď f injektivní, buď u libovolný prvek z $\operatorname{Ker} f$. Pak $f(u) = 0$, ale současně $f(0) = 0$, načež z injektivity $u = 0$.

Naopak, nechť $\operatorname{Ker} f = 0$ a nechť $f(a) = f(b)$. Pak $f(a - b) = f(a) - f(b) = 0$, a tedy $a - b \in \operatorname{Ker} f$, načež $a - b = 0$, čili $a = b$.

(2) Zřejmé. □

Jsou-li oba prostory U, V konečněrozměrné, pak se číslo $\dim \operatorname{Ker} f$ nazývá *defekt* a číslo $\dim \operatorname{Im} f$ *hodnost* lineárního zobrazení. Platí o nich následující tvrzení.

Tvrzení 12.2.3. *Buďte U, V konečněrozměrné vektorové prostory a $f\colon U \to V$ lineární zobrazení. Pak*

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim U.$$

Důkaz. Označme $\dim U = n$ a $\dim \operatorname{Ker} f = m$. Buď $(u_1, \ldots, u_m)$ báze $\operatorname{Ker} f$ a doplňme ji vektory $u_{m+1}, \ldots, u_n$ do báze U.

Potom vektory $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ generují $f(U) = \operatorname{Im} f$ (ověřte podrobně), přičemž $f(u_1) = \cdots = f(u_m) = 0$ a nulový vektor můžeme z množiny generátorů bez následků vyloučit. Zůstane nám tedy množina generátorů $\{f(u_{m+1}), \ldots, f(u_n)\}$.

Ukažme, že tato množina je lineárně nezávislá. Nechť

$$x_{m+1} f(u_{m+1}) + \cdots + x_n f(u_n) = 0.$$

Potom $f(x_{m+1}u_{m+1} + \cdots + x_n u_n) = 0$, čili $x_{m+1}u_{m+1} + \cdots + x_n u_n \in \operatorname{Ker} f$ a

$$x_{m+1}u_{m+1} + \cdots + x_n u_n = x_1 u_1 + \cdots + x_m u_m$$

pro vhodné koeficienty $x_1, \dots, x_m$. Z lineární nezávislosti množiny $\{u_1, \dots, u_n\}$ vyplývá, že všechny koeficienty $x_1, \dots, x_n$ jsou nulové, zejména $x_{m+1} = \dots = x_n = 0$ a množina $\{f(u_{m+1}), \dots, f(u_n)\}$ je tedy lineárně nezávislá.

Máme tedy bázi podprostoru $\operatorname{Im} f$ tvořenou $n-m$ vektory, takže $\dim \operatorname{Im} f = n-m = \dim U - \dim \operatorname{Ker} f$. □

12.3. Izomorfismy

Stejně jako u jiných algebraických struktur, bijektivní homomorfismy se nazývají izomorfismy.

Definice 12.3.1. *Izomorfismus* vektorových prostorů je bijektivní lineární zobrazení.

Tvrzení 12.3.1. *Buďte $f\colon U \to V$ lineární zobrazení a $(e_1, \dots, e_n)$ báze U. Potom*

(1) f je injektivní právě tehdy, když množina $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ je lineárně nezávislá;

(2) f je surjektivní právě tehdy, když vektory $f(e_1), \dots, f(e_n)$ generují V.

Důkaz. (1) Předpokládejme, že f je injektivní. Nechť

$$x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) = 0.$$

Potom $f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = 0$, tj. $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \operatorname{Ker} f$. Z injektivnosti f podle Tvrzení 12.2.2 vyplývá, že $x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = 0$, a z lineární nezávislosti množiny $\{e_1, \dots, e_n\}$ vyplývá, že $x_1 = \dots = x_n = 0$. Tedy, množina $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ je lineárně nezávislá.

Předpokládejme, že množina $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ je lineárně nezávislá a $f(u_1) = f(u_2)$ pro nějaké $u_1, u_2 \in U$. Tedy $u_1 = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, $u_2 = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$ a

$$\begin{aligned} 0 &= f(u_1) - f(u_2) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) - y_1 f(e_1) - \dots - y_n f(e_n) = \\ &= (x_1 - y_1) f(e_1) + \dots + (x_n - y_n) f(e_n). \end{aligned}$$

Z lineární nezávislosti množiny $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ dostaneme $x_1 - y_1 = \dots = x_n - y_n = 0$, čili $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$. Takže $u_1 = u_2$ a f je injektivní.

(2) Cvičení. □

Důsledek. *Buďte $f\colon U \to V$ lineární zobrazení a $(e_1, \dots, e_n)$ báze U. Potom f je izomorfismus právě tehdy, když $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ je báze V.*

Tvrzení 12.3.2. *Buď $f\colon U \to V$ izomorfismus. Pak $f^{-1}\colon V \to U$ je také izomorfismus.*

Důkaz. Zobrazení f je bijektivní, takže k němu existuje inverzní zobrazení f^{-1}, a to je také bijektivní. Zbývá dokázat, že je lineární. Buďte $v_1, v_2 \in V$. Díky bijektivnosti zobrazení f existují $u_1, u_2 \in U$ takové, že $f(u_1) = v_1$ a $f(u_2) = v_2$. Potom

$$\begin{aligned} f^{-1}(v_1 + v_2) &= f^{-1}(f(u_1) + f(u_2)) = \\ &= f^{-1}(f(u_1 + u_2)) = \\ &= u_1 + u_2 = \\ &= f^{-1}(v_1) + f^{-1}(v_2). \end{aligned}$$

Důkaz homogenity necháme jako cvičení. □

Definice 12.3.2. Vektorové prostory, mezi nimiž existuje izomorfismus, se nazývají *izomorfní*. Zapisujeme $U \cong V$.

Cvičení. Dokažte, že relace „být izomorfní“ je relace ekvivalence (reflexivní, symetrická, tranzitivní). □

Cvičení. (1) Homotetie $f_c\colon a \mapsto ca$ z příkladu (3) je izomorfismus právě tehdy, když $c \neq 0$.

(2) Homomorfismus $z \mapsto z^*$ z příkladu (8) je izomorfismus $\mathbb{C} \cong \mathbb{C}$.

(3) Homomorfismus re z příkladu (9) není izomorfismus (není injektivní).

(4) Otáčení je izomorfismus. Rovnoběžné promítání $E^3 \to E^2$ není izomorfismus. □

Cvičení. Buď $f\colon U \to V$ izomorfismus konečněrozměrných prostorů. Jestliže $(u_1, \dots, u_n)$ je báze prostoru U, pak $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ je báze prostoru V. Dokažte. Totéž pro množiny generátorů, resp. lineárně nezávislé množiny. □

Izomorfní prostory se z hlediska lineární algebry liší jen v označení prvků a operací, není mezi nimi žádný rozdíl odhalitelný prostředky lineární algebry.

V konečněrozměrném případě je situace obzvlášť příjemná: každý prostor je izomorfní s některým prostorem P^n.

Tvrzení 12.3.3. *Každý konečněrozměrný vektorový prostor U nad polem P je izomorfní s prostorem $P^{\dim U}$.*

Důkaz. Zobrazení $U \to P^{\dim U}$, které vektorům přiřazuje jejich souřadnice vzhledem k pevně zvolené bázi, je izomorfismus (ověřte podrobně). □

Počítání se souřadnicemi vektorů z U je tedy počítání v izomorfním prostoru $P^{\dim U}$. Na druhé straně, tento izomorfismus závisí na volbě báze, a to je důvod, proč není vhodné prostory U a $P^{\dim U}$ ztotožňovat.

Tvrzení 12.3.4. *Konečněrozměrné vektorové prostory nad stejným polem jsou izomorfní právě tehdy, když mají stejnou dimenzi.*

Důkaz. Buď $f\colon U \to V$ izomorfismus (mimo jiné, tedy injekce a surjekce). Podle Tvrzení 12.2.2 máme $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ a $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$, a proto díky Tvrzení 12.2.3 $\dim U = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.

Jestliže $\dim U = \dim V$, pak $U \cong P^{\dim U} = P^{\dim V} \cong V$. □

12.3.1. Přímé součty vektorových (pod)prostorů

Už známe přímý součet prostorů a přímý součet podprostorů. Jsou-li $U_1, \dots, U_n$ podprostory vektorového prostoru U, pak mohou existovat dva různé přímé součty, $U_1 \dotplus \dots \dotplus U_n$ a $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$. První z nich je podprostor prostoru U, kdežto druhý není. Nicméně, podle následujícího tvrzení tyto přímé součty jsou izomorfní.

Tvrzení 12.3.5. *Buďte $U_1, \dots, U_n$ podprostory konečněrozměrného vektorového prostoru U. Pak následující výroky jsou ekvivalentní:*

(1) součet $U_1 + \dots + U_n$ je přímý;
(2) $U_1 + \dots + U_n \cong U_1 \oplus \dots \oplus U_n$.

Důkaz. Předpokládejme, že součet $U_1 + \dots + U_n$ je přímý. Buď $p\colon U_1 \oplus \dots \oplus U_n \to U_1 + \dots + U_n$, $(u_1, \dots, u_n) \mapsto u_1 + \dots + u_n$. Zobrazení p je lineární (cvičení). Jelikož součet $U_1 + \dots + U_n$ je přímý, každé $u \in U_1 + \dots + U_n$ lze zapsat právě jedním způsobem jako $u = u_1 + \dots + u_n$, kde $u_i \in U_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$. Můžeme tedy definovat zobrazení $U_1 + \dots + U_n \to U_1 \oplus \dots \oplus U_n$, $u \mapsto (u_1, \dots, u_n)$. Toto zobrazení je inverzní k p, tudíž p je bijekce, a tedy izomorfismus.

Předpokládejme, že $U_1 + \dots + U_n \cong U_1 \oplus \dots \oplus U_n$. Potom $\dim(U_1 + \dots + U_n) = \dim(U_1 \oplus \dots \oplus U_n) = \dim U_1 + \dots + \dim U_n$ a podle Tvrzení 11.3.3 součet $U_1 + \dots + U_n$ je přímý. □

Cvičení. Dokažte, že zobrazení p z předchozího důkazu je lineární. □

Cvičení. Pro každé $i = 1, \dots, n$ zobrazení $\pi_i \colon U_1 \oplus \dots \oplus U_n \to U_i$ zadané předpisem $(u_1, \dots, u_n) \mapsto u_i$ se nazývá i-tá projekce.

Pro každé $i = 1, \dots, n$ zobrazení $\iota_i \colon U_i \to U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ zadané předpisem $u \mapsto (0, \dots, 0, u, 0, \dots, 0)$, kde u stojí na i-tém místě, se nazývá vložení i-tého sčítance.

Ukažte, že projekce π_i a vložení ι_i jsou lineární zobrazení. Spočtěte $\pi_i \circ \iota_j$. $\square$