

11. VEKTOROVÉ PODPROSTORY

11.1. Definice, příklady, základní vlastnosti

Definice 11.1.1. Budte V vektorový prostor nad polem P a $U \subseteq V$. U je *vektorový podprostor*, jestliže platí

- (i) $0 \in U$;
- (ii) $u_1 + u_2 \in U$ pro každé $u_1, u_2 \in U$ (uzavřenost na sčítání);
- (iii) $pu \in U$ pro každé $u \in U$ a každé $p \in P$ (uzavřenost na násobení skalárem).

Podle (iii) pro každý vektor $u \in U$ máme $-u = (-1) \cdot u \in U$, čili s každým vektorem leží v U i vektor k němu opačný. To spolu s (i) a (ii) znamená, že podprostor je podgrupa abelovské grupy $(V, +, 0, -)$.

Axiomy vektorového prostoru jsou splněny na V a tím spíše na U (cvičení). Tudíž, podobně jako u ostatních algebraických podstruktur, podprostor je sám též vektorovým prostorem.

Příklad. (1) V každém vektorovém prostoru je nulový podprostor obsahující jen nulový vektor.

(2) Každý prostor je sám svým podprostorem.

(3) \mathbb{R} je podprostorem vektorového prostoru \mathbb{C} nad polem \mathbb{R} (ověřte).

(4) $\{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$ je podprostor vektorového prostoru \mathbb{R}^2 nad polem \mathbb{R} (ověřte). \square

Tvrzení 11.1.1. Množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic o n neznámých s maticí A nad polem P je podprostor prostoru P^n s dimenzí $n - \text{rank } A$.

Důkaz. Tvrzení vyplývá z kapitoly 4.5. Každá homogenní soustava rovnic má nulové řešení, součet řešení je řešení a skalární násobek řešení je řešení. Množina všech řešení tedy má vlastnosti požadované v definici vektorového podprostoru. Navíc, fundamentální systém řešení má $n - \text{rank } A$ prvků a tvoří bázi prostoru všech řešení. \square

Mnoho dalších příkladů můžeme získat jako lineární obaly.

Tvrzení 11.1.2. Buď W podmnožina vektorového prostoru V nad polem P . Pak platí:

(1) $\llbracket W \rrbracket$ je podprostor prostoru V .

(2) Je-li U podprostor V obsahující W , pak $\llbracket W \rrbracket \subseteq U$.

Důkaz. (1) Ukážeme, že množina $\llbracket W \rrbracket$ splňuje podmínky (i)–(iii) z definice vektorového podprostoru. Podmínka (i): Pro libovolný vektor $v \in W$ je $0 = 0v \in \llbracket W \rrbracket$. Podmínka (ii): Jsou-li $u, v \in \llbracket W \rrbracket$, potom $u = x_1u_1 + \dots + x_mu_m$ a $v = y_1v_1 + \dots + y_nv_n$ pro nějaké $x_i, y_j \in P$, $u_i, v_j \in W$ a $m, n \in \mathbb{N}$. Tedy $u + v = x_1u_1 + \dots + x_mu_m + y_1v_1 + \dots + y_nv_n \in \llbracket W \rrbracket$. Podmínka (iii): Cvičení.

(2) Buď $w \in \llbracket W \rrbracket$, tedy $w = x_1w_1 + \dots + x_nw_n$ pro nějaké $x_i \in P$, $w_i \in W$ a $n \in \mathbb{N}$. Jelikož $W \subseteq U$, všechny vektory w_i jsou prvky U , a jelikož U je vektorový podprostor, tedy uzavřený na násobení skalárem a sčítání vektorů, $w \in \llbracket W \rrbracket$. \square

Tudíž, $\llbracket W \rrbracket$ je nejmenší podprostor prostoru V obsahující množinu W .

Tvrzení 11.1.3. Libovolný podprostor konečněrozměrného vektorového prostoru je konečněrozměrný.

Důkaz. Buď V konečněrozměrný prostor, $\dim V = n$, buď $U \subset V$ podprostor. Zkonstruujeme bázi postupem, který jsme použili při doplňování lineárně nezávislé množiny vektorů do báze v důkazu druhého Důsledku Tvzení 10.3.3.

0-tý krok: Je-li U nulový prostor, jsme hotovi (U je 0-rozměrný).

1-ní krok: Když $U \neq \{0\}$, pak existuje vektor $u_1 \in U \setminus \{0\}$. Je-li $U = \llbracket u_1 \rrbracket$, pak jsme hotovi (U je 1-rozměrný).

k -tý krok: Když $U \neq \llbracket u_1, \dots, u_{k-1} \rrbracket$, pak existuje vektor $u_k \in U \setminus \llbracket u_1, \dots, u_{k-1} \rrbracket$. Je-li $U = \llbracket u_1, \dots, u_k \rrbracket$, pak jsme hotovi (U je k -rozměrný).

Množina $\{u_1, \dots, u_k\}$ je lineárně nezávislá, protože žádný z jejích vektorů není lineární kombinací předchozích (podle konstrukce $u_i \notin \llbracket u_1, \dots, u_{i-1} \rrbracket$). Podle Tvzení 10.2.5 lineárně nezávislá množina nemá více prvků než množina generátorů, takže pro nějaké $m \leq n$ dostaneme $U = \llbracket u_1, \dots, u_m \rrbracket$. \square

Důsledek. *Vektorový prostor, který má nekonečněrozměrný podprostor, je nekonečněrozměrný.*

Příklad. Prostor $C^r\mathbb{R}$ všech funkcí $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, spojitých se všemi derivacemi až do řádu r včetně, je nekonečněrozměrný, protože obsahuje podprostor polynomů $\mathbb{R}[x]$, který je nekonečněrozměrný. \square

Tvzení 11.1.4. *Buď V konečněrozměrný vektorový prostor, buď U jeho podprostor. Jestliže $\dim U = \dim V$, pak $U = V$.*

Důkaz. Buď (u_1, \dots, u_n) libovolná báze U . Předpokládejme, že $U \neq V$, tedy že existuje vektor $v \in V \setminus U$. V prostoru V tak máme $(n+1)$ -prvkovou lineárně nezávislou množinu vektorů $\{u_1, \dots, u_n, v\}$ (žádný z nich není lineární kombinací předchozích: vektory u_i protože jsou bázové, vektor v proto, že jinak by ležel v U). Tedy $\dim V \geq n+1 > n = \dim U$. \square

Příklad. (1) Podprostory \mathbb{R} .

(2) Podprostory \mathbb{R}^2 .

(3) Podprostory \mathbb{R}^3 . \square

11.2. Průnik a součet podprostorů

Tvzení 11.2.1. *Buďte U_1, U_2 podprostory V . Pak $U_1 \cap U_2$ je podprostor V .*

Důkaz. Ukážeme, že množina $U_1 \cap U_2$ splňuje podmínky (i)–(iii) z definice vektorového podprostoru. Podmínka (i): $0 \in U_1 \cap U_2$, protože $0 \in U_1$ a $0 \in U_2$. Podmínka (ii): Nechť $u_1, u_2 \in U_1 \cap U_2$. Pak $u_1, u_2 \in U_1$, takže $u_1 + u_2 \in U_1$, a zároveň $u_1, u_2 \in U_2$, takže $u_1 + u_2 \in U_2$. Tudiž, $u_1 + u_2 \in U_1 \cap U_2$. Podmínka (iii): Cvičení. \square

Cvičení. Průnik libovolného systému podprostorů je podprostor. \square

Definice 11.2.1. Buďte U_1, U_2 podprostory V . Označme

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}.$$

Množina $U_1 + U_2$ se nazývá *součet* podprostorů U_1 a U_2 .

Prvky množiny $U_1 + U_2$ jsou všechny vektory $v \in V$, pro něž existuje vyjádření $v = u_1 + u_2$, kde $u_1 \in U_1$ a $u_2 \in U_2$.

Tvzení 11.2.2. *Buďte U_1, U_2 podprostory V . Pak $U_1 + U_2$ je podprostor V .*

Důkaz. Ukážeme, že množina $U_1 + U_2$ splňuje podmínky (i)–(iii) z definice vektorového podprostoru. Podmínka (i): $0 = 0 + 0 \in U_1 + U_2$, kde $0 \in U_1$ a $0 \in U_2$. Podmínka (ii): Nechť $u, v \in U_1 + U_2$. Pak $u = u_1 + u_2$ a $v = v_1 + v_2$, kde $u_1, v_1 \in U_1$, $u_2, v_2 \in U_2$, načež $u + v = u_1 + u_2 + v_1 + v_2 = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \in U_1 + U_2$. Podmínka (iii): Cvičení. \square

Cvičení. Dokažte, že (1) $U_1, U_2 \subseteq U_1 + U_2$.

(2) Je-li U podprostor ve V takový, že $U_1 \subseteq U$ a $U_2 \subseteq U$, pak $U_1 + U_2 \subseteq U$.

Návod: (1) Je-li $u_1 \in U_1$ libovolný prvek, pak $u_1 = u_1 + 0 \in U_1 + U_2$.

(2) Buď $u_1 + u_2$ obecný vektor z $U_1 + U_2$, $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$. Protože $U_1, U_2 \subseteq U$, máme $u_1, u_2 \in U$, načež $u_1 + u_2 \in U$.

Množina $S(V)$ všech podprostorů vektorového prostoru V je uspořádána inkluzí \subseteq . Z dokázaných tvrzení o průnicích a součtech podprostorů plyne, že množina $S(V)$ je svazově uspořádána, přičemž infimem je průnik a supremem je součet podprostorů. Tudíž, $(S(V), \cap, +)$ je svaz. \square

Tvrzení 11.2.3. *Budte U_1, U_2 konečněrozměrné podprostory jednoho vektorového prostoru. Pak*

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2).$$

Důkaz. Označme $\dim U_1 = n_1$, $\dim U_2 = n_2$ a $\dim(U_1 \cap U_2) = m$. Buď $\{u_1, \dots, u_m\}$ báze v $U_1 \cap U_2$. To je lineárně nezávislá množina vektorů v U_1 i v U_2 a můžeme ji tedy v obou prostorech doplnit do báze vektory $u_1^1, \dots, u_{n_1-m}^1$ resp. $u_1^2, \dots, u_{n_2-m}^2$. Ukažme, že $\{u_1, \dots, u_m, u_1^1, \dots, u_{n_1-m}^1, u_1^2, \dots, u_{n_2-m}^2\}$ je báze v $U_1 + U_2$.

Nejdříve ukážeme, že množina $\{u_1, \dots, u_m, u_1^1, \dots, u_{n_1-m}^1, u_1^2, \dots, u_{n_2-m}^2\}$ je lineárně nezávislá. Nechť

$$c_1 u_1 + \dots + c_m u_m + c_1^1 u_1^1 + \dots + c_{n_1-m}^1 u_{n_1-m}^1 + c_1^2 u_1^2 + \dots + c_{n_2-m}^2 u_{n_2-m}^2 = 0$$

pro nějaké skaláry $c_1, \dots, c_m, c_1^1, \dots, c_{n_1-m}^1, c_1^2, \dots, c_{n_2-m}^2 \in P$. Pak

$$c_1 u_1 + \dots + c_m u_m + c_1^1 u_1^1 + \dots + c_{n_1-m}^1 u_{n_1-m}^1 = -c_1^2 u_1^2 - \dots - c_{n_2-m}^2 u_{n_2-m}^2,$$

kde na levé straně je prvek z U_1 a na pravé prvek z U_2 , ale protože jsou si rovny, leží v $U_1 \cap U_2$, a lze je jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinace vektorů u_1, \dots, u_m . Vyjádříme tak vektor na pravé straně: existují skaláry $x_1, \dots, x_m \in P$ takové, že

$$x_1 u_1 + \dots + x_m u_m = -c_1^2 u_1^2 - \dots - c_{n_2-m}^2 u_{n_2-m}^2.$$

Z nezávislosti množiny $\{u_1, \dots, u_m, u_1^2, \dots, u_{n_2-m}^2\}$ (je to báze v U_2) plyne, že

$$x_1 = \dots = x_m = c_1^2 = \dots = c_{n_2-m}^2 = 0.$$

Odtud

$$c_1 u_1 + \dots + c_m u_m + c_1^1 u_1^1 + \dots + c_{n_1-m}^1 u_{n_1-m}^1 = 0,$$

a z nezávislosti množiny $\{u_1, \dots, u_m, u_1^1, \dots, u_{n_1-m}^1\}$ (je to báze v U_1) plyne, že

$$c_1 = \dots = c_m = c_1^1 = \dots = c_{n_1-m}^1 = 0.$$

Všechny koeficienty $c_1, \dots, c_m, c_1^1, \dots, c_{n_1-m}^1, c_1^2, \dots, c_{n_2-m}^2$ jsou tedy nulové, takže množina $\{u_1, \dots, u_m, u_1^1, \dots, u_{n_1-m}^1, u_1^2, \dots, u_{n_2-m}^2\}$ je lineárně nezávislá.

Snadno se dokáže, že vektory $u_1, \dots, u_m, u_1^1, \dots, u_{n_1-m}^1, u_1^2, \dots, u_{n_2-m}^2$ generují $U_1 + U_2$ (cvičení).

Máme tedy bázi v $U_1 + U_2$ o $m + (n_1 - m) + (n_2 - m) = n_1 + n_2 - m$ vektorech, takže $\dim(U_1 + U_2) = n_1 + n_2 - m = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$. \square

Příklad. V prostoru E^3 buď $U \subset E^3$ nějaká rovina procházející počátkem a $L \subset E^3$ libovolná přímka procházející počátkem a neležící v U . Pak U je podprostor a podobně L je podprostor, přičemž evidentně $U \cap L = \{0\}$. Proto $\dim(U + L) = \dim U + \dim L -$

$\dim(U \cap L) = 2 + 1 - 0 = 3 = \dim E^3$. Tudíž, $E^3 = U + L$ a každý vektor $v \in E^3$ je součtem $v = u + l$, kde $u \in U$ a $l \in L$. Jak najdeme vektory u, l , je-li dán vektor v ? \square

Cvičení. Buďte U_1, U_2 podprostory ve vektorovém prostoru V , nechť $\dim U_1 + \dim U_2 > \dim V$. Ukažte, že existuje nenulový vektor $u \in U_1 \cap U_2$. \square

Cvičení. Ukažte, že $[[u_1, \dots, u_n]] + [[v_1, \dots, v_m]] = [[u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m]]$. \square

Definici součtu podprostorů lze snadno rozšířit na libovolný konečný počet sčítanců:

$$U_1 + \dots + U_n = \{u_1 + \dots + u_n \mid u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n\}.$$

Vektor $v \in V$ tedy leží v $U_1 + \dots + U_n$ právě tehdy, když jej lze zapsat jako součet $v = u_1 + \dots + u_n$, přičemž $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$.

11.3. Přímý součet podprostorů

Definice 11.3.1. Buď V vektorový prostor nad polem P , buďte U_1, \dots, U_n podprostory V . Součet $U_1 + \dots + U_n$ se nazývá *přímý*, jestliže každý vektor $v \in U_1 + \dots + U_n$ lze zapsat *právě jedním způsobem* jako součet $v = u_1 + \dots + u_n$, kde $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$. Přímý součet zapisujeme s tečkami: $U_1 \dot{+} \dots \dot{+} U_n$.

Příklad. Nechť $U_1 = \{(x, 0, 0) \mid x \in P\}$, $U_2 = \{(0, y, 0) \mid y \in P\}$, $U_3 = \{(0, 0, z) \mid z \in P\}$. Pak $P^3 = U_1 \dot{+} U_2 \dot{+} U_3$, protože libovolný vektor $u = (x, y, z) \in P^3$ má jediné vyjádření ve tvaru součtu $u = u_1 + u_2 + u_3$, kde $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, u_3 \in U_3$, a sice $(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)$. \square

Tvrzení 11.3.1. Buďte U_1, U_2 podprostory V . Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (i) $V = U_1 \dot{+} U_2$;
- (ii) $V = U_1 + U_2, U_1 \cap U_2 = 0$.

Důkaz. (i) \Rightarrow (ii): Je-li $V = U_1 \dot{+} U_2$, pak každý vektor $v \in V$ lze vyjádřit jako součet $v = u_1 + u_2$, kde $u_1 \in U_1$ a $u_2 \in U_2$, čili $V = U_1 + U_2$. Ukažme, že $U_1 \cap U_2 = 0$. Buď $v \in U_1 \cap U_2$. Pak máme dva rozklady vektoru v na sčítance z U_1 a U_2 , a sice $v = 0 + v$ a $v = v + 0$. Totožnost obou rozkladů znamená, že $v = 0$.

(ii) \Rightarrow (i): Je-li $V = U_1 + U_2$, pak každý vektor $v \in V$ lze vyjádřit jako součet $v = u_1 + u_2$, kde $u_1 \in U_1$ a $u_2 \in U_2$. Dokážeme ještě jednoznačnost vektorů u_1, u_2 : Pokud je u'_1, u'_2 jiná dvojice vektorů taková, že $v = u'_1 + u'_2$, pak

$$0 = v - v = (u_1 - u'_1) + (u_2 - u'_2),$$

a tedy $u_1 - u'_1 = -(u_2 - u'_2)$. Vektor $u_1 - u'_1 \in U_1$ je roven vektoru $-(u_2 - u'_2) \in U_2$, proto leží v průniku $U_1 \cap U_2$, což je nulový prostor. Tudíž, $u_1 - u'_1 = 0$ a $u_2 - u'_2 = 0$. \square

Příklad. (1) $V = V \dot{+} 0$ pro libovolný vektorový prostor V .

(2) Prostor E^3 je přímým součtem $U \dot{+} L$, je-li $U \subset E^3$ libovolná rovina procházející počátkem a $L \subset E^3$ libovolná přímka procházející počátkem a neležící v U . \square

V případě konečněrozměrných podprostorů máme jednoduché kritérium.

Tvrzení 11.3.2. Buďte U_1, U_2 podprostory konečněrozměrného vektorového prostoru V takové, že $V = U_1 + U_2$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (i) $V = U_1 \dot{+} U_2$;
- (ii) $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$.

Důkaz. (i) \Rightarrow (ii): $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

(ii) \Rightarrow (i): Nechť $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$. Potom $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim V = 0$, čili $U_1 \cap U_2 = 0$. \square

Cvičení. Buďte $V = U_1 \dot{+} U_2$, $(e_1^1, \dots, e_{m_1}^1)$ báze podprostoru U_1 , $(e_1^2, \dots, e_{m_2}^2)$ báze podprostoru U_2 . Pak $(e_1^1, \dots, e_{m_1}^1, e_1^2, \dots, e_{m_2}^2)$ je báze prostoru V . Dokažte. \square

Cvičení. Buď $m < n$, buď $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$ báze vektorového prostoru V . Pak $V = \llbracket e_1, \dots, e_m \rrbracket \dot{+} \llbracket e_{m+1}, \dots, e_n \rrbracket$. Dokažte. \square

Vzniká otázka, jak jednoduše rozeznat přímý součet n podprostorů při $n > 2$. Mohlo by se zdát, že prostor V je přímým součtem podprostorů U_1, \dots, U_n , jestliže je jejich součtem a podprostory U_1, \dots, U_n mají po dvou nulový průnik. Následující příklad ukazuje, že to tak není:

Příklad. Prostor E^3 není přímým součtem $L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} U$, je-li U rovina procházející počátkem a jsou-li $L_1, L_2 \subset E^3$ různé přímky procházející počátkem, neležící v rovině U .

Skutečně, součet $L_1 + L_2$ je sice přímý, ale má nenulový průnik s rovinou U . Libovolný nenulový vektor $u = l_1 + l_2$ ležící v průniku $(L_1 + L_2) \cap U$ pak má dvojí vyjádření: jako součet $l_1 + l_2 + 0$ a jako součet $0 + 0 + u$. \square

Tvrzení 11.3.3. Buďte $U_1, \dots, U_n \subseteq V$ podprostory takové, že $V = U_1 + \dots + U_n$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

$$(i) \quad V = U_1 \dot{+} U_2 \dot{+} \dots \dot{+} U_n;$$

$$(ii) \quad U_1 \cap U_2 = 0, (U_1 + U_2) \cap U_3 = 0, \dots, (U_1 + \dots + U_{n-1}) \cap U_n = 0.$$

Je-li navíc prostor V konečněrozměrný, pak je s nimi ekvivalentní i podmínka

$$(iii) \quad \dim V = \dim U_1 + \dots + \dim U_n.$$

Důkaz. Cvičení. \square

Jsou-li U_1, \dots, U_n podprostory nějakého vektorového prostoru V , pak mohou existovat dva různé přímé součty, $U_1 \dot{+} \dots \dot{+} U_n$ a $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$. První z nich je podprostor V , kdežto druhý není. Nicméně, tyto přímé součty jsou izomorfní, což plyne z tvrzení uvedeného později v kapitole o lineárních zobrazeních.

Příklad. Buďte $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ a $U_2 = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Potom

$$U_1 \dot{+} U_2 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \text{ je podprostor } \mathbb{R}^3,$$

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \text{ je báze } U_1 \dot{+} U_2 \text{ a}$$

$$\dim(U_1 \dot{+} U_2) = 2.$$

$$U_1 \oplus U_2 = \{((x, 0, 0), (0, y, 0)) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \text{ není podprostor } \mathbb{R}^3,$$

$$\{((1, 0, 0), (0, 0, 0)), ((0, 0, 0), (0, 1, 0))\} \text{ je báze } U_1 \oplus U_2 \text{ a}$$

$$\dim(U_1 \oplus U_2) = 2. \quad \square$$

11.4. Popis podprostorů P^n homogenními soustavami

Každý podprostor prostoru P^n je množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic.

Tvrzení 11.4.1. Každý podprostor $U \subseteq P^n$ je množina všech řešení homogenní soustavy $Ax = 0$, kde A je vhodná matice typu $m \times n$, přičemž $m = n - \dim U$.

Důkaz. Podprostor U je konečněrozměrný, nechť $U = \llbracket v_1, \dots, v_k \rrbracket$. Je třeba najít matici A takovou, že U je množina všech řešení soustavy $Ax = 0$. Matice A tedy musí mít n sloupků a má platit

$$Av_i = 0 \quad \text{pro každé } i = 1, \dots, k,$$

což je totéž jako

$$AV = 0,$$

kde V je matice s k sloupkou v_1, \dots, v_k . Transponujeme-li na obou stranách, obdržíme ekvivalentní rovnici

$$V^T A^T = 0.$$

Řádky hledané matice A tedy můžeme získat jako nějaký fundamentální systém řešení homogenní soustavy

$$V^T a = 0, \quad \text{kde } a \text{ je } n\text{-tice (sloupek) neznámých.}$$

Označme Ξ_A , resp. Ξ_{V^T} prostor všech řešení homogenní soustavy $Ax = 0$, resp. $V^T a = 0$. Máme $v_i \in \Xi_A$, odkud $\llbracket v_1, \dots, v_k \rrbracket \subseteq \Xi_A$. Přitom platí $\dim \Xi_A = n - \text{rank } A = n - \dim \Xi_{V^T} = n - (n - \text{rank } V^T) = \text{rank } V^T = \dim \llbracket v_1, \dots, v_k \rrbracket$. Tudíž, $\Xi_A = U$. \square

Příklad. Buď $U = \llbracket (1, 0, 2) \rrbracket \subset \mathbb{R}^3$. Najdeme soustavu rovnic, jejíž množina všech řešení je právě U .

Podle důkazu předchozího tvrzení je třeba vyřešit soustavu $V^T a = 0$, tedy rovnici

$$1 \cdot a^1 + 0 \cdot a^2 + 2 \cdot a^3 = 0.$$

Neznámá a^1 je hlavní, neznámé a^2, a^3 jsou parametry. Obecné řešení tedy je

$$a^1 = -2 \cdot t^2, \quad a^2 = t^1, \quad a^3 = t^2$$

a vhodnými volbami parametrů dostaneme fundamentální systém řešení

$$(0, 1, 0), \quad (-2, 0, 1).$$

Tudíž, matice hledané homogenní soustavy je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Není obtížné najít součet podprostorů zadaných generátory, resp. průnik podprostorů zadaných homogenními soustavami rovnic:

Cvičení. $\llbracket u_1, \dots, v_i \rrbracket + \llbracket u_{i+1}, \dots, u_n \rrbracket = \llbracket u_1, \dots, v_i, u_{i+1}, \dots, u_n \rrbracket$. \square

Cvičení. $\{x \mid A'x = 0\} \cap \{x \mid A''x = 0\} = \{x \mid Ax = 0\}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix}. \quad \square$$

Protože zadání podprostoru generátory umíme převádět na zadání homogenní soustavou rovnic a naopak, umíme najít i součet podprostorů zadaných homogenními soustavami rovnic, resp. průnik podprostorů zadaných generátory.