3. přednáška, 7. 3. 2023

Tvrzení 10.3.1. *Každý konečněrozměrný vektorový prostor má bázi.*

Důkaz. Podle definice konečněrozměrný vektorový prostor má konečnou množinu generátorů. Ukážeme, že v ní existuje lineárně nezávislá podmnožina, která generuje tentýž vektorový prostor a je tedy jeho báze. Buď $\{v_1, \dots, v_n\}$ množina generátorů vektorového prostoru. Z této množiny postupně pro $i = 1, \dots, n$ vylučme vektor v_i, je-li lineární kombinací předchozích. Tedy v_1 vyloučíme, pokud $v_1 = 0$. Vektory, které nevyloučíme, označme $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$. Je-li prvek množiny generátorů lineární kombinací ostatních prvků této množiny, po jeho vyloučení z této množiny zůstane opět množina generátorů stejného vektorového prostoru (ověřte). Proto vektory $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$ generují tentýž vektorový prostor.

Díky uvedenému postupu žádný z vektorů $v_{i_1}, \dots, v_{i_m}$ není lineární kombinací předchozích a množina $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_m}\}$ je lineárně nezávislá. □

I nulový prostor $\{0\}$ má bázi. Je jí $\emptyset$, jelikož je lineárně nezávislá a $[\![\emptyset]\!] = \{0\}$.

Tvrzení 10.3.2. *Všechny báze jednoho konečněrozměrného vektorového prostoru mají stejný počet prvků.*

Důkaz. Buďte $(v_1, \dots, v_n)$ a $(u_1, \dots, u_m)$ báze vektorového prostoru V. Jelikož vektory $v_1, \dots, v_n$ generují V a $\{u_1, \dots, u_m\}$ je lineárně nezávislá množina, podle Tvrzení 10.2.5 $n \geq m$. Obdobně dostaneme, že $m \geq n$. Takže $n = m$. □

Definice 10.3.2. *Dimenze* vektorového prostoru je počet vektorů (libovolné) jeho báze. Vektorový prostor V dimenze n se nazývá n-*rozměrný*, zapisujeme $\dim V = n$. Nulový vektorový prostor $\{0\}$ se nazývá 0-*rozměrný*.

Příklad. (1) Vektorový prostor P^n nad polem P je n-rozměrný. Jednou z bází je n-tice (*kanonická báze*) $((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1))$.

(2) Vektorový prostor $\mathbb{C}$ nad polem $\mathbb{R}$ je dvojrozměrný. Jednou z bází je dvojice $(1, i)$. Nad polem $\mathbb{C}$ je vektorový prostor samozřejmě jednorozměrný, jednu z bází tvoří vektor 1. Vidíme, že dva vektorové prostory mohou mít *různé* dimenze, přestože mají *stejné* množiny vektorů.

(3) Vektorový prostor $\mathbb{C}^n$ nad polem $\mathbb{R}$ je $2n$-rozměrný. Jednou z bází je $2n$-tice

$$\begin{aligned}
&((1, 0, \dots, 0), (i, 0, \dots, 0),\\
&\ (0, 1, 0, \dots, 0), (0, i, 0, \dots, 0),\\
&\ \dots,\\
&\ (0, \dots, 0, 1), (0, \dots, 0, i)).
\end{aligned}$$

■

Definice 10.3.3. (1) *Minimální množina generátorů* vektorového prostoru V je množina generátorů prostoru V, jejíž žádná vlastní podmnožina negeneruje V.

(2) *Maximální lineárně nezávislá množina vektorů* vektorového prostoru V je lineárně nezávislá množina vektorů z V, která není vlastní podmnožinou žádné lineárně nezávislé množiny.

Tvrzení 10.3.3. *Buďte $v_1, \dots, v_n \in V$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) $\{v_1, \dots, v_n\}$ je báze V;
(2) $\{v_1, \dots, v_n\}$ je minimální množina generátorů V;
(3) $\{v_1, \dots, v_n\}$ je maximální lineárně nezávislá množina vektorů V.

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2): Je-li $\{v_1, \dots, v_n\}$ báze, je to množina generátorů a žádný z nich není lineární kombinací ostatních. Tudíž žádná její vlastní podmnožina negeneruje V a $\{v_1, \dots, v_n\}$ je minimální množina generátorů.

(2) $\Rightarrow$ (1): $\{v_1, \dots, v_n\}$ je množina generátorů. Jelikož je minimální, žádný z jejích vektorů není lineární kombinací ostatních, takže je navíc lineárně nezávislá, čili báze.

(1) $\Rightarrow$ (3): Je-li $\{v_1, \dots, v_n\}$ báze, je lineárně nezávislá a každý vektor z V je lineární kombinací vektorů báze. Tudíž každá vlastní nadmnožina je lineárně závislá a tato je tedy maximální.

(3) $\Rightarrow$ (1): Množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá. Jelikož je maximální, po přidání libovolného vektoru z V, dostaneme lineárně závislou množinu a ten přidaný vektor (ty původní to být nemohou) je lineární kombinací předchozích, takže $\{v_1, \dots, v_n\}$ je navíc množina generátorů, čili báze. □

Tvrzení poskytuje dvě alternativní definice báze, které se často používají. Má také důležité důsledky.

Důsledek. *Buď V n-rozměrný vektorový prostor. Pak*

(1) libovolná jeho n-prvková lineárně nezávislá podmnožina tvoří bázi V;
(2) libovolných n jeho generátorů tvoří bázi V.

Důkaz. (1) Prostor V má n-prvkovou množinu generátorů, takže podle Tvrzení 10.2.5 každá n-prvková lineárně nezávislá podmnožina je maximální, tedy báze.

(2) V prostoru V existuje n-prvková lineárně nezávislá množina, takže podle Tvrzení 10.2.5 každá n-prvková množina generátorů je minimální, tedy báze. □

Důsledek. *Buď $\{v_1, \dots, v_k\}$ lineárně nezávislá podmnožina n-rozměrného vektorového prostoru V. Pak ji lze doplnit do báze $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$.*

Důkaz. V případě, že $v_1, \dots, v_k$ generují V, tvoří bázi. Jinak existuje vektor $v_{k+1} \in V$, který není lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_k$, načež množina $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ je lineárně nezávislá, protože v_{k+1} není lineární kombinací předchozích vektorů.

Opakováním téže úvahy získáme lineárně nezávislou množinu $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}\}$. Po $n - k$ opakováních budeme mít n-prvkovou lineárně nezávislou množinu, která bude bází podle předchozího důsledku. □

10.4. Souřadnice

Tvrzení 10.4.1. *Buď $(e_1, \dots, e_n)$ báze vektorového prostoru V nad polem P. Pak pro každé $v \in V$ existuje právě jedna n-tice $x^1, \dots, x^n \in P$ taková, že $v = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$.*

Důkaz. Buď $v \in V$. Jelikož $e_1, \dots, e_n$ generují V, existují $x^1, \dots, x^n \in P$ takové, že $v = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$. Je-li $y^1, \dots, y^n$ libovolná n-tice taková, že $v = y^1 e_1 + \dots + y^n e_n$, pak

$$\begin{aligned} 0 = v - v &= (x^1 e_1 + \dots + x^n e_n) - (y^1 e_1 + \dots + y^n e_n) = \\ &= (x^1 - y^1) e_1 + \dots + (x^n - y^n) e_n. \end{aligned}$$

Z lineární nezávislosti množiny $\{e_1, \dots, e_n\}$ plyne $x^1 - y^1 = \dots = x^n - y^n = 0$, a tedy $x^1 = y^1, \dots, x^n = y^n$. □

Cvičení. Zformulujte a dokažte obrácené tvrzení. ▷

Definice 10.4.1. Skaláry $x^1, \dots, x^n$ z předchozího tvrzení se nazývají *souřadnice* vektoru v vzhledem k bázi $(e_1, \dots, e_n)$.

Souřadnice budeme zapisovat buď jako prvky pole $x^1, \dots, x^n$ nebo jako uspořádanou n-tici $x = (x^1, \dots, x^n)$ nebo jako matici typu $n \times 1$

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Příklad. (1) Souřadnice vektoru $2 \in \mathbb{R}$ vzhledem k bázi (6) je $\frac{1}{3}$, protože $2 = \frac{1}{3} \cdot 6$.

(2) Souřadnice vektoru $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ v kanonické bázi jsou x, y, z, protože $(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1)$.

(3) Souřadnice vektoru $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ v bázi $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ jsou $x-y, y-z, z$, protože $(x, y, z) = (x - y) \cdot (1, 0, 0) + (y - z) \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (1, 1, 1)$.

(4) Souřadnice vektoru $z = a + bi \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ vzhledem k bázi $(1, i)$ jsou a, b, protože $z = a \cdot 1 + b \cdot i$.

Souřadnice vektoru $z = a + bi \in \mathbb{C}(\mathbb{C})$ vzhledem k bázi (1) je z, protože $z = z \cdot 1$. ■

Souřadnice vektoru závisí na volbě báze. Jeden vektor má v různých bázích různé souřadnice.

Buď V n-rozměrný vektorový prostor nad polem P. Buď $e = (e_1, \dots, e_n)$ nějaká báze V, nazvěme ji *stará báze*. Buď $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ jiná báze V, nazvěme ji *nová báze*. Buď $v \in V$ libovolný vektor. Souřadnice vektoru v ve staré bázi označme $x = (x^1, \dots, x^n) \in P^n$ a říkejme jim *staré souřadnice*. Souřadnice vektoru v v nové bázi označme $x' = (x'^1, \dots, x'^n) \in P^n$ a říkejme jim *nové souřadnice*. Platí tedy $v = \sum_i x^i e_i = \sum_i x'^i e'_i$. Zajímá nás vztah mezi starými a novými souřadnicemi x a x'.

Definice 10.4.2. Matice, jejíž sloupky jsou tvořeny novými souřadnicemi starých bázových vektorů, se nazývá *matice přechodu* od staré báze k nové bázi.

Tvrzení 10.4.2. *Matice přechodu je regulární.*

Důkaz. □

Tvrzení 10.4.3. *Buď $Q_{ee'}$ matice přechodu od staré báze e k nové bázi e' a buďte x a x' staré a nové souřadnice jednoho vektoru. Potom*

$$x' = Q_{ee'} \cdot x.$$

Důkaz. Buď $Q_{ee'} = (q^i_j)$ matice přechodu od staré báze e k nové bázi e' (u q^i_j horní index je řádkový, dolní index je sloupkový). Tedy

$$e_i = \sum_j q^j_i e'_j.$$

Buď $v = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n \in V$. Potom

$$\begin{aligned} v &= x^1 \sum\nolimits_j q^j_1 e'_j + \dots + x^n \sum\nolimits_j q^j_n e'_j = \\ &= x^1 (q^1_1 e'_1 + q^2_1 e'_2 + \dots + q^n_1 e'_n) + \dots + x^n (q^1_n e'_1 + q^2_2 e'_2 + \dots + q^n_n e'_n) = \\ &= \left(\sum\nolimits_j q^1_j x^j\right) e'_1 + \left(\sum\nolimits_j q^2_j x^j\right) e'_2 + \dots + \left(\sum\nolimits_j q^n_j x^j\right) e'_n. \end{aligned}$$

Tedy

$$x'^i = \sum_j q^i_j x^j \qquad \text{a} \qquad x' = Q_{ee'} \cdot x.$$ □

Příklad. (1) Mějme $\mathbb{R}$, starou bázi $e = (6)$ a novou bázi $e' = (1)$. Pro $v = 2$ je $x = (\frac{1}{3})$ a $x' = (2)$.

Matice přechodu od staré báze e k nové bázi e' je

$$Q_{ee'} = \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix}.$$

A skutečně

$$x' = (6) \cdot (\tfrac{1}{3}) = (2).$$

(2) Mějme $\mathbb{R}^2$, starou bázi $e = ((1,-1),(1,1))$ a novou bázi $e' = ((0,2),(2,1))$. Pro $v = (2,0)$ je $x = (1,1)$ a $x' = (-\frac{1}{2}, 1)$.

Matice přechodu od staré báze e k nové bázi e' je

$$Q_{ee'} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

A skutečně

$$x' = Q_{ee'} \cdot x = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

■

Tvrzení 10.4.4. *Buďte V vektorový prostor nad polem P, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ jeho báze, $u, v \in V$, $p \in P$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$ souřadnice vektoru u a $y = (y^1, \ldots, y^n)$ souřadnice vektoru v. Pak $x + y = (x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n)$ jsou souřadnice vektoru $u + v$ a $px = (px^1, \ldots, px^n)$ jsou souřadnice vektoru pu.*

Důkaz. Cvičení. □

10.5. Přímý součet vektorových prostorů

Definice 10.5.1. Buďte $V_1, \ldots, V_n$ vektorové prostory nad polem P. Na kartézském součinu $V_1 \times \cdots \times V_n$ zaveďme sčítání a násobení skalárem předpisem

$$(u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n),$$
$$p(u_1, \ldots, u_n) = (pu_1, \ldots, pu_n)$$

pro libovolné $(u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$ a $p \in P$.
Na $V_1 \times \cdots \times V_n$ tak dostaneme strukturu vektorového prostoru nad polem P, který se značí $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ a nazývá se *přímý součet* vektorových prostorů $V_1, \ldots, V_n$.

Cvičení. Ověřte, že $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ je vektorový prostor. ▷

Tvrzení 10.5.1. *Buďte $V_1, \ldots, V_n$ konečněrozměrné vektorové prostory. Pak*

$$\dim(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) = \dim V_1 + \cdots + \dim V_n.$$

Důkaz. Pro každé i nechť $(e^i_1, \ldots, e^i_{m_i})$ je báze V_i. Potom

$$\begin{aligned} &((e^1_1, 0, \ldots, 0), \ldots, (e^1_{m_1}, 0, \ldots, 0), \\ &\ (0, e^2_1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, e^2_{m_2}, 0, \ldots, 0), \\ &\ \ldots, \\ &\ (0, \ldots, 0, e^n_1), \ldots, (0, \ldots, 0, e^n_{m_n})) \end{aligned}$$

je báze $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ (cvičení). □

Příklad. Buď $V_1 = \mathbb{R}$ a $V_2 = \mathbb{R}^2$. Potom $V_1 \times V_2$ je množina $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ uspořádaných dvojic (x, y), kde $x \in \mathbb{R}$ a $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, tedy $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \{(x, (y_1, y_2)) | \, x \in \mathbb{R}, (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2\}$. Například

$$(1, (2, 3)) + (2, (1, -1)) = (1 + 2, (2, 3) + (1, -1)) = (3, (3, 2)),$$
$$3 \cdot (2, (1, 4)) = (3 \cdot 2, 3 \cdot (1, 4)) = (6, (3, 12)).$$

Buď $e^1 = (1)$ báze $\mathbb{R}$ a buď $e^2 = (e^2_1, e^2_2) = ((1, 0), (0, 1))$ báze $\mathbb{R}^2$. Potom trojice

$$((e^1, 0), (0, e^2_1), (0, e^2_2)) = ((1, (0, 0)), (0, (1, 0)), (0, (0, 1)))$$

je báze $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$ a $\dim(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2) = 3 = \dim \mathbb{R} + \dim \mathbb{R}^2 = 1 + 2$. ■