11. přednáška, 2. 5. 2023

15.8. Ortogonální projekce

Definice 15.8.1. Buď V prostor se skalárním součinem, $v \in V$ a U podprostor V. Vektor $u \in U$ je *ortogonální projekce (kolmý průmět) vektoru v do podprostoru U*, jestliže $(v-u) \perp U$, tedy $v - u \in U^{\perp}$. Označujeme $u = v_U$ nebo $u = \mathrm{pr}_U(v)$.

Z definice vyplývá, že je-li $v \in U$, potom $v_U = v$.

Tvrzení 15.8.1. *Buď V prostor se skalárním součinem, U podprostor V a $v \in V$. Pak pro každý vektor $u \in U$, $u \neq v_U$, platí*

$$\|v - v_U\| < \|v - u\|.$$

Ortogonální projekce vektoru do podprostoru je určena jednoznačně, pokud existuje.

Důkaz. Podle definice $v_U \in U$ a $(v - v_U) \perp U$, takže pro každé $u \in U$ platí $(v - v_U) \perp (v_U - u)$. Pro $u \neq v_U$ navíc

$$\begin{aligned} \|v - v_U\|^2 &< && (\|v_U - u\| > 0) \\ &< \|v - v_U\|^2 + \|v_U - u\|^2 = && \text{(Pythagorova věta)} \\ &= \|(v - v_U) + (v_U - u)\|^2 = \\ &= \|v - u\|^2. \end{aligned}$$

Nechť $u_1, u_2 \in U$ jsou ortogonální projekce vektoru v do podprostoru U. Předpokládejme, že $u_1 \neq u_2$. Potom podle právě dokázaného

$$\|v - u_1\| < \|v - u_2\| \quad \text{a zároveň} \quad \|v - u_2\| < \|v - u_1\|.$$

Dostáváme spor, takže $u_1 = u_2$ a ortogonální projekce je tedy určena jednoznačně. □

Tvrzení 15.8.2. *Buďte V prostor se skalárním součinem, U jeho konečněrozměrný podprostor a $(e_1, \ldots, e_m)$ ortogonální báze podprostoru U. Pak pro každé $v \in V$ platí*

$$\mathrm{pr}_U(v) = \frac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \cdots + \frac{(v, e_m)}{(e_m, e_m)} e_m.$$

Je-li $(e_1, \ldots, e_m)$ navíc ortonormální báze, pak

$$\mathrm{pr}_U(v) = (v, e_1) e_1 + \cdots + (v, e_m) e_m.$$

Důkaz. Vektor $u = u^1 e_1 + \cdots + u^m e_m \in U$ je ortogonální projekce vektoru v do podprostoru $U = [\![e_1, \ldots, e_m]\!]$ právě tehdy, když vektor $v - u$ je kolmý ke každému vektoru z U, což je právě tehdy, když $v - u$ je kolmý ke každému e_i, to je právě tehdy, když pro každé $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$\begin{aligned} 0 &= (v - u, e_i) = (v, e_i) - (u, e_i) = \\ &= (v, e_i) - (u^1 e_1 + \cdots + u^m e_m, e_i) = \\ &= (v, e_i) - u^1 (e_1, e_i) - \cdots - u^m (e_m, e_i) = \\ &= (v, e_i) - u^i (e_i, e_i) \end{aligned}$$

a to je právě tehdy, když $u^i = \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)}$, jelikož $(e_i, e_i) \neq 0$.

Pokud $(e_1, \ldots, e_n)$ je ortonormální báze, pak zřejmě $u^i = (v, e_i)$. □

15.9. Gramova-Schmidtova ortogonalizace

Tvrzení 15.9.1. *V každém konečněrozměrném vektorovém prostoru se skalárním součinem existuje ortonormální báze.*

Důkaz. Existenci ortonormální báze dokážeme pomocí *Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace.*

Buďte V konečněrozměrný prostor se skalárním součinem a $(v_1, \dots, v_n)$ jeho báze. Ukažme, že existuje jeho ortogonální báze.

(1) Položme $e_1 = v_1$. Potom vektor e_1 je nenulový, $\{e_1\}$ je lineárně nezávislá množina a $[\![e_1]\!] = [\![v_1]\!]$.

(2) Postupně pro $k = 1, \dots, n-1$ předpokládejme, že máme $\{e_1, \dots, e_k\}$ ortogonální množinu nenulových vektorů (tedy lineárně nezávislou množinu) takovou, že $[\![e_1, \dots, e_k]\!] = [\![v_1, \dots, v_k]\!]$. Označme $U_k = [\![e_1, \dots, e_k]\!]$. Vektor e_{k+1} získáme tak, že od vektoru v_{k+1} odečteme jeho ortogonální projekci do podprostoru U_k. Tedy

$$e_{k+1} = v_{k+1} - \mathrm{pr}_{U_k}(v_{k+1}) = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(v_{k+1}, e_i)}{(e_i, e_i)} e_i.$$

Podle definice ortogonální projekce vektor e_{k+1} je kolmý na U_k, tedy na všechny vektory z U_k, včetně $e_1, \dots, e_k$. Množina $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$ je tedy ortogonální.

Jelikož báze je lineárně nezávislá, vektor v_{k+1} není prvkem podprostoru U_k a nerovná se tedy své ortogonální projekci $\mathrm{pr}_{U_k}(v_{k+1})$ do tohoto podprostoru. Proto e_{k+1} je nenulový vektor a množina $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$ je lineárně nezávislá.

K tomu, $[\![e_1, \dots, e_{k+1}]\!] = [\![v_1, \dots, v_{k+1}]\!]$. Platí $e_1 = v_1$ a e_i, $i \in \{2, \dots, k+1\}$, je lineární kombinace vektorů $e_1, \dots, e_{i-1}, v_i$, proto $[\![e_1, \dots, e_{k+1}]\!] \subseteq [\![v_1, \dots, v_{k+1}]\!]$. Na druhou stranu, v_i pro $i \in \{1, \dots, k+1\}$ je lineární kombinace vektorů $e_1, \dots, e_i$, proto $[\![v_1, \dots, v_{k+1}]\!] \subseteq [\![e_1, \dots, e_{k+1}]\!]$.

Takže pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ $(e_1, \dots, e_k)$ je ortogonální báze prostoru U_k a $U_n = V$.

Nakonec, pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ položme

$$\overline{e_i} = \frac{e_i}{\|e_i\|}$$

a dostaneme ortonormální bázi $(\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n})$ prostoru V. □

V předchozím důkazu je možné vždy po získání e_k tento vektor normovat a dostat tak ortonormální bázi prostoru U_k. V takovém případě se zjednoduší výpočet ortogonální projekce do podprostoru U_k a tedy i výpočet vektoru e_{k+1}.

15.10. Vlastnosti ortogonálního doplňku

Tvrzení 15.10.1. *Nechť V je prostor se skalárním součinem a U jeho konečněrozměrný podprostor. Pak*

(1) $U^{\perp\perp} = U$,
(2) $V = U \dot{+} U^{\perp}$,
(3) je-li V konečněrozměrný, potom $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$.

Důkaz. (1) Každý vektor z U je kolmý na $U^{\perp}$, takže $U \subseteq U^{\perp\perp}$. Buď $v \in U^{\perp\perp}$. Tedy v je kolmý na každý vektor z $U^{\perp}$, speciálně i $v \perp (v - v_U)$. Podprostor U je konečněrozměrný, takže existuje v_U. Podle definice ortogonální projekce také $v_U \perp (v - v_U)$. Z toho dostaneme

$$\|v - v_U\|^2 = (v - v_U, v - v_U) = (v, v - v_U) - (v_U, v - v_U) = 0 - 0 = 0,$$

proto $v = v_U$. Jelikož $v_U \in U$, máme $U^{\perp\perp} \subseteq U$ a celkově $U^{\perp\perp} = U$.

(2) Opět, podprostor U je konečněrozměrný, takže ke každému vektoru $v \in V$ existuje jeho ortogonální projekce do U. Platí $v_U \in U$, $(v - v_U) \perp U$, čili $v - v_U \in U^{\perp}$, a $v = v_U + (v - v_U)$. Takže $V = U + U^{\perp}$. Jelikož U a $U^{\perp}$ jsou vzájemně kolmé, v jejich průniku je jen nulový vektor. Z toho vyplývá, že $V = U \dot{+} U^{\perp}$.

(3) Z předchozího bodu a Tvrzení 11.3.2 dostaneme $\dim V = \dim U + \dim U^{\perp}$. □

Tvrzení 15.10.2. *Nechť V je prostor se skalárním součinem, U_1, U_2 jeho konečněrozměrné podprostory. Potom*

$$(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \subseteq U_1^{\perp} + U_2^{\perp} = (U_1 \cap U_2)^{\perp}.$$

Důkaz.

$$\begin{array}{lclcl} U_1, U_2 \subseteq U_1 + U_2 & \Rightarrow & (U_1 + U_2)^{\perp} \subseteq U_1^{\perp}, U_2^{\perp} & \Rightarrow & (U_1 + U_2)^{\perp} \subseteq U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \\ U_1 \cap U_2 \subseteq U_1, U_2 & \Rightarrow & U_1^{\perp}, U_2^{\perp} \subseteq (U_1 \cap U_2)^{\perp} & \Rightarrow & U_1^{\perp} + U_2^{\perp} \subseteq (U_1 \cap U_2)^{\perp} \end{array}$$

V právě dokázaných vztazích místo U_1, U_2 použijeme $U_1^{\perp}, U_2^{\perp}$ a dostaneme

$$\begin{array}{lcl} (U_1^{\perp} + U_2^{\perp})^{\perp} \subseteq U_1^{\perp\perp} \cap U_2^{\perp\perp} = U_1 \cap U_2 & \Rightarrow & (U_1 \cap U_2)^{\perp} \subseteq U_1^{\perp} + U_2^{\perp} \\ U_1 + U_2 = U_1^{\perp\perp} + U_2^{\perp\perp} \subseteq (U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp})^{\perp} & \Rightarrow & (U_1 + U_2)^{\perp} \subseteq U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \end{array}$$

Nakonec, zřejmě

$$U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \subseteq U_1^{\perp} + U_2^{\perp}.$$ □

Cvičení. Najděte V, U_1, U_2 takové, že $(U_1 \cap U_2)^{\perp} \not\subseteq U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$. □

15.11. Shodnosti

Shodnost je lineární transformace, která zachovává skalární součin.

Definice 15.11.1. Buď V prostor se skalárním součinem. Lineární transformace $f\colon V \to V$ je *shodnost*, jestliže

$$(f(u), f(v)) = (u, v).$$

V eukleidovském případě se shodnost běžně nazývá *ortogonální transformace*, v hermiteovském případě se shodnost nazývá *unitární transformace*.

Každá shodnost zachovává i délky vektorů: platí rovnost $\|f(u)\| = \|u\|$, protože $\|f(u)\|^2 = (f(u), f(u)) = (u, u) = \|u\|^2$ a délky jsou nezáporná čísla.

Platí však i opačné tvrzení: zobrazení zachovávající délky zachovává i skalární součin.

Tvrzení 15.11.1. *Lineární transformace $f\colon V \to V$ je shodnost právě tehdy, když zachovává délky vektorů.*

Důkaz. Implikace "⇒" vyplývá z předchozího odstavce.

Nechť tedy f zachovává délky vektorů. Ukažme, že f je shodnost. V eukleidovském případě pro libovolné vektory $u, v \in V$ máme $\|u+v\|^2 = (u+v, u+v) = \|u\|^2 + 2(u, v) + \|v\|^2$, načež

$$(u, v) = \tfrac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$$

pro libovolné dva vektory $u, v \in V$. Platí to tedy i pro vektory $f(u), f(v)$, čili

$$\begin{aligned}(f(u), f(v)) &= \tfrac{1}{2}(\|f(u)+f(v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2)\\ &= \tfrac{1}{2}(\|f(u+v)\|^2 - \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2)\\ &= \tfrac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)\\ &= (u, v).\end{aligned}$$

Podobně v hermiteovském případě.

□

Tvrzení 15.11.2. *Každá shodnost v konečněrozměrném vektorovém prostoru se skalárním součinem je izomorfismus.*

Důkaz. Shodnost je lineární zobrazení. Je tedy potřeba dokázat již jen bijektivnost. Buď $u \in \operatorname{Ker} f$, tedy $f(u) = 0$. Potom $\|u\| = \|f(u)\| = 0$ a $u = 0$. Takže, $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ a f je injektivní.

Dále $\dim \operatorname{Im} f = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f = \dim V$, proto $\operatorname{Im} f = V$ a f je surjektivní. □

Je-li $(e_1, \ldots, e_n)$ ortonormální báze, existuje jednoduchý způsob, jak rozeznat shodnost.

Tvrzení 15.11.3. *Buď $(e_1, \ldots, e_n)$ ortonormální báze prostoru V, buď $f\colon V \to V$ lineární transformace. Pak f je shodnost právě tehdy, když $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ je též ortonormální báze.*

Důkaz. □

V následujícím tvrzení budeme charakterizovat matice, které mohou být maticí shodného zobrazení v nějaké ortonormální bázi.

Definice 15.11.2. Čtvercová reálná matice A, splňující podmínku $A^\mathsf{T} A = E$, se nazývá *ortogonální*.

Tvrzení 15.11.4. *Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace eukleidovského vektorového prostoru V, buď A její matice v ortonormální bázi $(e_1, \ldots, e_n)$. Pak f je shodnost právě tehdy, když je matice A ortogonální.*

Důkaz. □