15. Skalární součin

Označení. Číslo komplexně sdružené k číslu z označujeme $\overline{z}$.

Definice 15.0.1. Buď V vektorový prostor nad P, kde $P = \mathbb{R}$ nebo $P = \mathbb{C}$. Zobrazení $g\colon V \times V \to P$ je *skalární součin* na V, jestliže pro libovolné $u, v, w \in V$ a $p \in P$ platí

(1) $g(u + v, w) = g(u, w) + g(v, w)$;
(2) $g(pu, v) = pg(u, v)$;
(3) $g(u, v) = \overline{g(v, u)}$;
(4) $g(v, v) > 0$ pro $v \neq 0$.

Číslo $g(v, v)$ je reálné pro každý vektor v, i v případě, že $P = \mathbb{C}$ (cvičení). Díky tomu lze ve čtvrté vlastnosti porovnávat $g(v, v)$ s 0.

První dvě vlastnosti znamenají, že skalární součin je lineární v prvním argumentu, třetí vlastnost je v reálném případě symetrie, v komplexním případě kosá symetrie, čtvrtá vlastnost je pozitivní definitnost.

Definice 15.0.2. Vektorový prostor se skalárním součinem je *prostor se skalárním součinem*. Pokud $P = \mathbb{R}$, skalární součin je *eukleidovský* a prostor je *eukleidovský prostor*. Pokud $P = \mathbb{C}$, skalární součin je *hermiteovský* a prostor je *hermiteovský* nebo *unitární prostor*.

Označení. Nemůže-li dojít k nedorozumění, místo $g(u, v)$ píšeme jen (u, v).

Tvrzení 15.0.1. *Buď V vektorový prostor nad P se skalárním součinem. Pro libovolné $u, v, w \in V$ a $p \in P$ platí*

(1) $(u, v + w) = (u, v) + (u, w)$;
(2) $(u, pv) = \overline{p}(u, v)$;
(3) $(0, v) = (v, 0) = 0$;
(4) $(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Důkaz. (1)

$$(u, v + w) = \overline{(v + w, u)} = \overline{(v, u) + (w, u)} = \overline{(v, u)} + \overline{(w, u)} = (u, v) + (u, w).$$

(2)

$$(u, pv) = \overline{(pv, u)} = \overline{p(v, u)} = \overline{p}\,\overline{(v, u)} = \overline{p}(u, v).$$

(3)

$$(0, v) = (0 \cdot v, v) = 0 \cdot (v, v) = 0 \quad \text{a} \quad (v, 0) = \overline{(0, v)} = 0.$$

(4) Důsledek podmínky (4) v definici skalárního součinu a předchozího bodu (3). □

Podle (1) a (2) v předchozím tvrzení Eukleidovský skalární součin je lineární i v druhém argumentu.

Příklad. (1) Standardní skalární součin na $\mathbb{R}^n$. Pro $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$,

$$(x, y) = x^1 y^1 + \cdots + x^n y^n.$$

(2) Standardní skalární součin na $\mathbb{C}^n$. Pro $x, y \in \mathbb{C}^n$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$,

$$(x, y) = x^1\overline{y^1} + \cdots + x^n\overline{y^n}.$$

(3) Buďte $a_1, \dots, a_n$ kladná reálná čísla. Zobrazení $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, které vektorům $x = (x^1, \dots, x^n), y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$ přiřadí číslo

$$(x, y) = a_1 x^1 y^1 + \cdots + a_n x^n y^n,$$

je skalární součin na $\mathbb{R}^n$.

(4) Buďte $a_1, \dots, a_n$ kladná reálná čísla. Zobrazení $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, které vektorům $x = (x^1, \dots, x^n), y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{C}^n$ přiřadí číslo

$$(x, y) = a_1 x^1 \overline{y^1} + \cdots + a_n x^n \overline{y^n},$$

je skalární součin na $\mathbb{C}^n$.

(5) Zobrazení, které maticím $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ přiřadí číslo

$$(A, B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A^i_j B^i_j,$$

je skalární součin na $\mathbb{R}^{m \times n}$.

(6) Zobrazení, které maticím $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ přiřadí číslo

$$(A, B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A^i_j \overline{B^i_j},$$

je skalární součin na $\mathbb{C}^{m \times n}$.

(7) Zobrazení, které spojitým reálným funkcím f, g na intervalu $[0, 2\pi]$ přiřadí reálné číslo

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) \mathrm{d}x,$$

je skalární součin na prostoru všech spojitých reálných funkcí na intervalu $[0, 2\pi]$. □

15.1. Délka (norma) vektoru

Připomeňme, že $(v, v) \in \mathbb{R}$ a $(v, v) \geq 0$ pro každé v.

Definice 15.1.1. Buď V prostor se skalárním součinem, $v \in V$. *Délka* nebo *norma* vektoru v je číslo

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}.$$

Definice 15.1.2. Vektor délky 1 je *jednotkový* nebo *normovaný*.

Délka vektoru tedy závisí na skalárním součinu, a tak uvedené značení lze použít jen, je-li jasné, který skalární součin je uvažován a nemůže dojít k nedorozumění.

Příklad. (1) Mějme standardní skalární součin na $\mathbb{R}^2$. Délka vektoru $(1, 2)$ je $\sqrt{5}$.

(2) Na $\mathbb{R}^2$ mějme skalární součin $((x^1, x^2), (y^1, y^2)) = x^1 y^1 + 2x^2 y^2$. Délka vektoru $(1, 2)$ je 3.

(3) Na prostoru všech spojitých reálných funkcí na intervalu $[0,1]$ mějme skalární součin

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Takže délka (norma) funkce f je

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 (f(x))^2\mathrm{d}x}.$$

Pokud, například, $f(x) = x$, potom

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 x^2\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

□

Tvrzení 15.1.1. *Buď V prostor se skalárním součinem nad P. Pro libovolné $v \in V$ a $p \in P$ platí*

(1) $\|v\| \geq 0$, navíc $\|v\| = 0$ právě tehdy, když $v = 0$,
(2) $\|pv\| = |p|\|v\|$,
(3) jestliže $v \neq 0$, pak

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = 1.$$

Důkaz. (1) Jednoduchý důsledek definice skalárního součinu a Tvrzení 15.0.1.
(2) $\|pv\| = \sqrt{(pv,pv)} = \sqrt{p\overline{p}(v,v)} = \sqrt{|p|^2(v,v)} = |p|\sqrt{(v,v)} = |p|\|v\|$.
(3) Cvičení. □

15.2. Nerovnosti

Tvrzení 15.2.1 (Cauchyho-Buňakovského-Schwarzova nerovnost)**.** *Nechť V je prostor se skalárním součinem a $u, v \in V$. Pak*

$$|(u,v)| \leq \|u\|\|v\|.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $\{u,v\}$ je lineárně závislá množina.

Důkaz. Je-li $u = 0$ nebo $v = 0$, (ne)rovnost platí a $\{u,v\}$ je lineárně závislá množina.

Nechť $u \neq 0$ a $v \neq 0$. Stačí dokazovat případ $\|u\| = \|v\| = 1$; obecný se na něj převede záměnou u za $u/\|u\|$ a v za $v/\|v\|$ (cvičení). V eukleidovském případě máme

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{2}\|u \pm v\|^2 &= \frac{1}{2}(u \pm v, u \pm v) = \frac{1}{2}((u,u) \pm (u,v) \pm (v,u) + (v,v)) \\ &= 1 \pm (u,v). \end{aligned}$$

Odtud $\mp(u,v) \leq 1$, a tedy $|(u,v)| \leq 1$.

Jestliže platí rovnost $|(u,v)| = 1$, pak $(u,v) = \pm 1$, načež $0 = 1 \mp (u,v) = \frac{1}{2}\|u \mp v\|^2$, a tedy $u \mp v = 0$ a $\{u,v\}$ je lineárně závislá množina. □

Důležitý důsledek Cauchyho–Buňakovského–Schwarzovy nerovnosti je následující tvrzení, které je známé jako trojúhelníková nerovnost.

Tvrzení 15.2.2 (Trojúhelníková nerovnost)**.** *Nechť V je prostor se skalárním součinem a $u, v \in V$. Pak*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $\{u,v\}$ je lineárně závislá množina.

Důkaz.

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= (u+v,u+v) = (u,u)+(u,v)+\overline{(u,v)}+(v,v) = \\ &= \|u\|^2 + 2\,\mathrm{re}(u,v) + \|v\|^2 \le \|u\|^2 + 2|(u,v)| + \|v\|^2 \le \\ &\le \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\|+\|v\|)^2\end{aligned}$$

Zbytek důkazu je jednoduché cvičení. □

15.3. Odchylka vektorů

Pro nenulové vektory u, v můžeme Cauchyho–Buňakovského–Schwarzovu nerovnost zapsat ve tvaru

$$\frac{|(u,v)|}{\|u\|\|v\|} \le 1$$

a v eukleidovském případě

$$-1 \le \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|} \le 1.$$

Funkce cos zúžená na interval $[0,\pi]$ je injektivní a tento interval zobrazuje vzájemně jednoznačně na interval $[-1,1]$. Pro každou dvojici nenulových vektorů u, v tedy existuje právě jedno reálné číslo $\varphi \in [0,\pi]$ takové, že

$$\cos\varphi = \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|}.$$

Definice 15.3.1. Buďte V eukleidovský prostor a $u, v \in V$ nenulové. *Odchylka* vektorů u, v (nebo *úhel* mezi vektory u, v) je (jediné) číslo $\varphi \in [0,\pi]$ takové, že

$$\cos\varphi = \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|}.$$

Pro libovolný eukleidovský skalární součin tedy platí

$$(u,v) = \|u\|\|v\|\cos\varphi.$$

Tvrzení 15.3.1 (Kosinová věta). *Buďte V eukleidovský prostor, $u, v \in V$ nenulové a φ úhel mezi nimi. Potom*

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\varphi.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}\|u-v\|^2 &= (u-v,u-v) = (u,u) - 2(u,v) + (v,v) = \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\varphi.\end{aligned}$$

□

15.4. Ortogonalita (kolmost)

Definice 15.4.1. Buď V prostor se skalárním součinem. Vektory $u, v \in V$ jsou *kolmé* (nebo *ortogonální*), jestliže $(u, v) = 0$. Zapisujeme $u \perp v$.

Dva vektory jsou tedy kolmé právě tehdy, když jejich odchylka je $\pi/2$.

Díky tomu, že $(u, v) = \overline{(v, u)}$, kolmost vektorů nezávisí na jejich pořadí. Jelikož pro každý vektor $v \in V$ platí $(v, 0) = 0$, nulový vektor je kolmý ke každému vektoru. Z toho, že $(pu, qv) = p\overline{q}(u, v)$ pro každé $p, q \in P$, vyplývá, že libovolné skalární násobky kolmých vektorů jsou také kolmé.

Definice 15.4.2. Buď V prostor se skalárním součinem. Množina $U \subset V$ je *ortogonální*, jestliže $u \perp v$ pro libovolné různé $u, v \in U$. Ortogonální množina normovaných vektorů je *ortonormální*.

Když v ortogonální množině nenulových vektorů každý vektor vynásobíme převrácenou hodnotou jeho délky (každý vektor znormujeme), dostaneme ortonormální množinu.

Tvrzení 15.4.1. *Každá ortogonální množina nenulových vektorů je lineárně nezávislá.*

Důkaz. Buď $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortogonální množina nenulových vektorů. Nechť

$$p_1 v_1 + \cdots + p_n v_n = 0.$$

Když pro libovolné $i \in \{1, \dots, n\}$ obě strany této rovnosti skalárně vynásobíme zprava vektorem v_i, dostaneme

$$\begin{aligned} (p_1 v_1 + \cdots + p_n v_n, v_i) &= (0, v_i) \\ p_1(v_1, v_i) + \cdots + p_n(v_n, v_i) &= 0 && \text{(linearita v prvním argumentu)} \\ p_i(v_i, v_i) &= 0 && \text{(kolmost)} \\ p_i &= 0 && (v_i \neq 0 \text{ a } (v_i, v_i) > 0). \end{aligned}$$

Takže $p_i = 0$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá. □

Důsledek. *Každá n-prvková ortogonální množina nenulových vektorů v n-rozměrném prostoru je báze tohoto prostoru.*

Příklad. (1) Mějme $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem. Kanonická báze je ortonormální.

(2) Mějme prostor všech spojitých reálných funkcí na intervalu $[0, 2\pi]$ se skalárním součinem

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) \mathrm{d}x.$$

Množina $\{1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \dots\}$ je ortogonální. □

Tvrzení 15.4.2 (Pythagorova věta)**.** *Buďte V prostor se skalárním součinem a $u, v \in V$ kolmé. Pak*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v, u + v) = \\ &= (u, u) + (u, v) + (v, u) + (v, v) = && (u \perp v) \\ &= (u, u) + (v, v) = \|u\|^2 + \|v\|^2. \end{aligned}$$

□

Cvičení. Buď $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortogonální množina. Ukažte, že

$$\|v_1 + \cdots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2.$$

□

15.5. Souřadnice vzhledem k ortonormální bázi

Tvrzení 15.5.1. *Nechť V je prostor se skalárním součinem, $(e_1, \ldots, e_n)$ jeho báze a $v \in V$. Je-li $(e_1, \ldots, e_n)$ ortogonální báze, pak*

$$v = \frac{(v, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 + \cdots + \frac{(v, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n,$$

čili i-tá souřadnice vektoru v vzhledem k uvedené bázi je

$$x^i = \frac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)} = \frac{(v, e_i)}{\|e_i\|^2}.$$

Je-li $(e_1, \ldots, e_n)$ navíc ortonormální báze, pak

$$v = (v, e_1)e_1 + \cdots + (v, e_n)e_n,$$

čili i-tá souřadnice vektoru v vzhledem k uvedené bázi je

$$x^i = (v, e_i).$$

Důkaz. Buď $(e_1, \ldots, e_n)$ ortogonální báze. Nechť $v = x^1 e_1 + \cdots + x^n e_n$. Obě strany vynásobíme zprava vektorem e_i s $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dostaneme

$$\begin{aligned}(v, e_i) &= (x^1 e_1 + \cdots + x^n e_n, e_i) = \\ &= x^1(e_1, e_i) + \cdots + x^n(e_n, e_i) = \\ &= x^i(e_i, e_i).\end{aligned}$$

Bázové vektory jsou nenulové, takže (e_i, e_i) je nenulové a $x^i = \frac{(v,e_i)}{(e_i,e_i)} = \frac{(v,e_i)}{\|e_i\|^2}$.

Pokud $(e_1, \ldots, e_n)$ je ortonormální báze, pak zřejmě $x^i = (v, e_i)$. □

Tvrzení 15.5.2. *Nechť V je prostor se skalárním součinem, $(e_1, \ldots, e_n)$ jeho ortonormální báze, $u, v \in V$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$ souřadnice vektoru u a $y = (y^1, \ldots, y^n)$ souřadnice vektoru v vzhledem k uvedené bázi. Potom*

$$(u, v) = x^{\mathsf{T}} \overline{y} = x^1 \overline{y^1} + \cdots + x^n \overline{y^n}.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}(u, v) &= \left(\sum_{i=1}^n x^i e_i, \sum_{i=1}^n y^i e_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x^i e_i, y^j e_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^i \overline{y^j} (e_i, e_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n x^i \overline{y^i}.\end{aligned}$$

□

15.6. Kolmost množin

Definice 15.6.1. Buď V prostor se skalárním součinem, $v \in V$ a $M, N \subset V$. Vektor v je *kolmý na množinu* M, jestliže v je kolmý na každý vektor z M, zapisujeme $v \perp M$. Množina M je *kolmá na množinu* N, jestliže každý vektor množiny M je kolmý na každý vektor množiny N, zapisujeme $M \perp N$.

Cvičení. V průniku kolmých množin může být jen nulový vektor. □

Například, dvě roviny v $\mathbb{R}^3$ nejsou vzájemně kolmé.

Tvrzení 15.6.1. *Buď V prostor se skalárním součinem a $M, N \subset V$. Potom $M \perp N$ právě tehdy, když $[\![M]\!] \perp N$, a to je právě tehdy, když $[\![M]\!] \perp [\![N]\!]$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $M \perp N$. Buď $u \in [\![M]\!]$ a $v \in N$, čili $u = p^1 u_1 + \dots + p^n u_n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, skaláry $p^1, \dots, p^n$ a vektory $u_1, \dots, u_n \in M$. Potom

$$(u, v) = (p^1 u_1 + \dots + p^n u_n, v) = \\ = p^1 (u_1, v) + \dots + p^n (u_n, v) = 0.$$

Takže $[\![M]\!] \perp N$.

Opačná implikace a druhá ekvivalence jsou zřejmé. □

Chceme-li ověřit, zda vektor $v \in V$ je kolmý na podprostor $U \subset V$, díky předcházejícímu tvrzení stačí ověřit, zda vektor v je kolmý na všechny vektory z libovolné množiny generátorů podprostoru U.

15.7. Ortogonální doplněk

Definice 15.7.1. Nechť V je prostor se skalárním součinem a $U \subset V$. *Ortogonální doplněk* $U^\perp$ množiny U je množina všech vektorů z V kolmých na každý vektor z U, tedy

$$U^\perp = \{v \in V \mid v \perp u \text{ pro všechna } u \in U\}.$$

Množina $U^\perp$ je tedy největší množina kolmá na U.

Tvrzení 15.7.1. *Buď V prostor se skalárním součinem, $U, U_1, U_2 \subset V$. Pak*

(1) jestliže $U_1 \subseteq U_2$, pak $U_2^\perp \subseteq U_1^\perp$,
(2) $U^\perp = [\![U]\!]^\perp$,
(3) $U^\perp$ je podprostor V.

Důkaz. (1) Je-li $U_1 \subseteq U_2$ a $v \in U_2^\perp$, tedy $v \perp U_2$, potom $v \perp U_1$ a $v \in U_1^\perp$.
(2) Pro $v \in V$ podle Tvrzení 15.6.1 $v \in U^\perp$ právě tehdy, když $v \in [\![U]\!]^\perp$.
(3) Zřejmě $0 \in U^\perp$. Pro libovolné $v_1, v_2 \in U^\perp$ a $u \in U$ platí $(v_1 + v_2, u) = (v_1, u) + (v_2, u) = 0$, takže $v_1 + v_2 \in U^\perp$. Pro libovolný skalár p, $v \in U^\perp$ a $u \in U$ platí $(pv, u) = p(v, u) = 0$, takže $pv \in U^\perp$. □