10. Vektorové prostory

10.1. Definice, příklady, základní vlastnosti

Vektor je běžně znázorňován v rovině nebo v prostoru jako orientovaná úsečka (šipka), která má počáteční bod a koncový bod. Pokud je možné jeden takový vektor převést na druhý takový vektor rovnoběžným posunutím, říká se, že tyto dva vektory jsou totožné nebo ekvivalentní, nebo že jsou to dvě umístění jednoho vektoru. Takové vektory se sčítají pomocí pravidla rovnoběžníku a násobí se reálným číslem tak, že šipka se příslušně prodlouží nebo zkrátí a při násobení záporným číslem navíc změní směr na opačný.

Obecně definujeme vektor jako prvek vektorového prostoru a vektorový prostor nad nějakým polem jako množinu s operací sčítání a s násobením prvků množiny prvky pole s takovými vlastnostmi, které umožňují představu vektoru jako šipky a představu sčítání vektorů a násobení vektoru prvkem pole, jak je uvedeno v předchozím odstavci.

Definice 10.1.1. Buď V neprázdná množina, P pole. *Vektorový prostor V nad polem P* je množina V spolu s binární operací $+\colon V \times V \to V$, $(u, v) \mapsto u + v$, a zobrazením $\cdot\colon P \times V \to V$, $(p, v) \mapsto p \cdot v$, takovými, že

(1) pro každé $u, v, w \in V$ platí $(u + v) + w = u + (v + w)$,
(2) existuje $0 \in V$ takový, že pro každé $v \in V$ platí $v + 0 = v$,
(3) pro každé $v \in V$ existuje $-v \in V$ takové, že $v + (-v) = 0$,
(4) pro každé $u, v \in V$ platí $u + v = v + u$,
(5) pro každé $v \in V$ platí $1 \cdot v = v$,
(6) pro každé $p, q \in P$ a $v \in V$ platí $(p \cdot q) \cdot v = p \cdot (q \cdot v)$,
(7) pro každé $p, q \in P$ a $v \in V$ platí $(p + q) \cdot v = (p \cdot v) + (q \cdot v)$,
(8) pro každé $p \in P$ a $u, v \in V$ platí $p \cdot (u + v) = (p \cdot u) + (p \cdot v)$.

Prvky množiny V jsou *vektory*, prvky pole P jsou *skaláry*. Binární operace $+$ se nazývá *sčítání*, zobrazení $\cdot$ se nazývá *násobení skalárem*, vektor $0 \in V$ je *nulový vektor* nebo *nula*, vektor $-v$ je *opačný vektor* k vektoru v.

Podmínky (1)–(8) jsou *axiomy vektorového prostoru*. Podmínky (1)–(4) znamenají, že V s operací $+$ je komutativní grupa.

Jelikož každá binární operace má nejvýše jeden neutrální prvek, ve vektorovém prostoru existuje jediný nulový vektor. Obdobně, jelikož každý prvek má vzhledem k asociativní binární operaci nejvýše jeden inverzní prvek, ke každému vektoru existuje jediný opačný vektor.

Násobení skalárem $\cdot\colon P \times V \to V$, $(p, v) \mapsto p \cdot v$, není binární operace (není-li $P = V$), ale nazývá se *vnější operace*, a místo $p \cdot v$ se často píše jen pv. Binární operace se někdy nazývá *vnitřní operace*.

Vektorový prostor nad polem $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$ se nazývá *reálný*, resp. *komplexní* vektorový prostor.

Příklad. (1) Vektorový prostor Eukleidovské geometrie, dvojrozměrné i trojrozměrné, kde vektor je třída ekvivalentních šipek a je reprezentován jednotlivými šipkami, jak je uvedeno v prvním odstavci této kapitoly.

Nulový vektor je reprezentován degenerovanou úsečkou nulové délky. Vektorový prostor v rovině resp. prostoru značíme E^2 resp. E^3.

(2) Buď V jednoprvková množina, P pole. Jediný prvek množiny V označme 0 a položme $0+0=0$, $-0=0$ a $p\cdot 0=0$ pro každé $p\in P$. Dostáváme vektorový prostor nazývaný *nulový prostor* nebo také *triviální prostor*.

(3) Každé pole je vektorový prostor nad sebou samým. Položíme-li v definici vektorového prostoru $V=P$, budou všechny axiomy vektorového prostoru důsledky axiomů pole (ověřte). Získáváme tak například vektorový prostor $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{R}$, vektorový prostor $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$, vektorový prostor $\mathbb{Q}$ nad $\mathbb{Q}$ a vektorový prostor $\mathbb{Z}_2$ nad $\mathbb{Z}_2$.

(4) Každé pole je vektorový prostor nad libovolným svým podpolem. Jediný rozdíl oproti předchozímu příkladu spočívá v tom, že násobení skalárem je dovoleno jen pro skaláry z podpole.

(5) Buď $n\in\mathbb{N}$, P pole. Na množině P^n všech uspořádaných n-tic prvků P zaveďme sčítání a násobení skalárem předpisem

$$
\begin{aligned}
&(u_1,u_2,\ldots,u_n)+(v_1,v_2,\ldots,v_n)=(u_1+v_1,u_2+v_2,\ldots,u_n+v_n),\\
&p(u_1,u_2,\ldots,u_n)=(pu_1,pu_2,\ldots,pu_n).
\end{aligned}
$$

Vzniká vektorový prostor P^n nad polem P (ověřte). Například řádky a sloupky matic jsou prvky takových vektorových prostorů.

(6) Vektorový prostor P^n nad podpolem $Q\subset P$.

(7) Vektorový prostor matic typu $m\times n$ nad polem P s operacemi sčítání a násobení skalárem. Značí se $P^{m\times n}$ nebo $\mathcal{M}_{m\times n}(P)$ (resp. $\mathcal{M}_m(P)$ nebo $\mathrm{gl}(m,P)$ v případě čtvercových matic).

(8) Vektorový prostor polynomů stupně nejvýše n nad polem P s operacemi sčítání a násobení skalárem.

(9) Vektorový prostor polynomů nad polem P s operacemi sčítání a násobení skalárem.

(10) Vektorový prostor všech řešení homogenní soustavy rovnic.

(11) Buď X množina, P pole. Na množině P^X všech zobrazení $X\to P$ zaveďme sčítání a násobení skalárem předpisem

$$
\begin{aligned}
&(u+v)(x)=u(x)+v(x),\\
&(pu)(x)=p\cdot u(x).
\end{aligned}
$$

Vzniká vektorový prostor P^X nad polem P (ověřte). Speciální případy jsou množina všech funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, množina všech spojitých funkcí na $\mathbb{R}$, množina diferencovatelných funkcí na $\mathbb{R}$, množina všech spojitých funkcí na intervalu $[a,b]$. ■

Tvrzení 10.1.1. *Buď V vektorový prostor nad polem P. Pak pro každé $u,v\in V$, $p,q\in P$ platí*

(i) $0\cdot v=0$,
(ii) $(-1)\cdot v=-v$,
(iii) $(p-q)\cdot v=p\cdot v-q\cdot v$,
(iv) $p\cdot(u-v)=p\cdot u-p\cdot v$,
(v) *Je-li* $p\cdot v=0$, *pak buď* $p=0$ *nebo* $v=0$.

Důkaz. Cvičení. □

10.2. Lineární kombinace, generátory, lineární nezávislost

Definice 10.2.1. Buď V vektorový prostor nad polem P.

(1) Buďte $n \in \mathbb{N}$, $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ a $p_1, p_2, \dots, p_n \in P$. *Lineární kombinace* vektorů $v_1, v_2, \dots, v_n$ s koeficienty $p_1, p_2, \dots, p_n$ je vektor

$$p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots + p_n v_n \in V.$$

Pro $n = 0$ definujeme lineární kombinaci prázdné množiny vektorů jako nulový vektor $0 \in V$.

(2) Buď $U \subset V$. *Lineární obal* množiny U je množina $[\![U]\!]$ všech lineárních kombinací konečně mnoha vektorů množiny U. Pro $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ je

$$[\![U]\!] = [\![u_1, u_2, \dots, u_n]\!] = \{p_1 u_1 + p_2 u_2 + \cdots + p_n u_n |\ p_1, p_2, \dots, p_n \in P\}.$$

Lineární obal prázdné množiny je $[\![\emptyset]\!] = \{0\}$.

(3) Vektory $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ *generují* V, je-li každý vektor $v \in V$ jejich lineární kombinací, to jest, jestliže pro každý vektor $v \in V$ existují skaláry $p_1, p_2, \dots, p_n \in P$ takové, že $v = p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots + p_n v_n$, to jest, jestliže $[\![v_1, v_2, \dots, v_n]\!] = V$. Potom $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ je *množina generátorů* prostoru V.

(4) Prostor, který má konečnou množinu generátorů, se nazývá *konečněrozměrný*.

Příklad. (1) Součet vektorů u, v je jejich lineární kombinace s koeficienty $1, 1$. Opačný vektor k v je jeho lineární kombinace (skalární násobek) s koeficientem -1:

$$u + v = 1 \cdot u + 1 \cdot v, \quad -v = (-1) \cdot v.$$

(2) Lineární kombinace vektorů $1, 6 \in \mathbb{R}$ s koeficienty $3, 1 \in \mathbb{R}$ je $3 \cdot 1 + 1 \cdot 6 = 9$.

(3) Lineární kombinace vektorů $(1, 2, 0), (2, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ s koeficienty $-3, 2 \in \mathbb{R}$ je

$$(-3) \cdot (1, 2, 0) + 2 \cdot (2, 3, 1) = (1, 0, 2).$$ ■

Příklad. (1) Prostor $\mathbb{R}^3$ je generován vektory $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Skutečně, libovolný vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ je jejich lineární kombinací s koeficienty x, y, z:

$$(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1).$$

(2) Prostor $\mathbb{R}^3$ je generován vektory $(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$. Skutečně, libovolný vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ je jejich lineární kombinací s koeficienty $x - y, y - z, z$:

$$(x, y, z) = (x - y) \cdot (1, 0, 0) + (y - z) \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (1, 1, 1).$$

(3) Prostor $\mathbb{R}^3$ je generován vektory $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (3, 4, 5)$. Libovolný vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ je jejich lineární kombinací s koeficienty $x, y, z, 0$:

$$(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1) + 0 \cdot (3, 4, 5).$$

V tomto případě můžeme najít dokonce nekonečně mnoho vyjádření ve tvaru lineární kombinace, pro libovolný parametr $t \in \mathbb{R}$ platí

$$(x, y, z) = (x - 3t) \cdot (1, 0, 0) + (y - 4t) \cdot (0, 1, 0) + (z - 5t) \cdot (0, 0, 1) + t \cdot (3, 4, 5).$$

(4) Prostor $\mathbb{R}^3$ není generován vektory $(1, 2, 0), (3, 4, 0), (5, 6, 0)$. Ověřte.

(5) Vektory $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$, kde $v_i = (v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^m)$, generují $\mathbb{R}^m$, jestliže soustava

$$\begin{aligned} v_1^1 x^1 + v_2^1 x^2 + \cdots + v_n^1 x^n &= v^1 \\ v_1^2 x^1 + v_2^2 x^2 + \cdots + v_n^2 x^n &= v^2 \\ &\vdots \\ v_1^m x^1 + v_2^m x^2 + \cdots + v_n^m x^n &= v^m \end{aligned}$$

o neznámých $x^1, x^2, \ldots, x^n$ má řešení pro každou pravou stranu $v^1, v^2, \ldots, v^m$. Soustava je totiž ekvivalentní s podmínkou

$$x^1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^m \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \\ \vdots \\ v_2^m \end{pmatrix} + \cdots + x^n \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix}.$$

(6) Prostor $\mathbb{R}_2[x]$ polynomů neurčité x s reálnými koeficienty stupně nejvýše 2 je generován vektory $x^2, x+1, 1$. Ověřte. ■

Příklad. Vektorový prostor $\mathbb{R}[x]$ všech polynomů s reálnými koeficienty není konečněrozměrný. Pro libovolné $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}[x]$ existuje přirozené číslo m, které je větší než stupeň kteréhokoliv z polynomů $p_1, \ldots, p_n$. Pak polynom $x^m \in \mathbb{R}[x]$ není lineární kombinací polynomů $p_1, \ldots, p_n$, takže polynomy $p_1, \ldots, p_n$ negenerují $\mathbb{R}[x]$. ■

Cvičení. (1) Jestliže $v_1, \ldots, v_n$ generují V a v_i je lineární kombinací ostatních, pak $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$ také generují V. Dokažte.

(2) Nechť každý z vektorů $v_1, \ldots, v_n$ je lineární kombinace vektorů $u_1, \ldots, u_m \in V$. Jestliže $v_1, \ldots, v_n$ generují V, pak $u_1, \ldots, u_m$ také generují V. Dokažte. ▷

Definice 10.2.2. Buď V vektorový prostor nad polem P.

(1) Množina vektorů $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ je *lineárně nezávislá*, jestliže z rovnosti

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = 0, \text{ kde } x_1, x_2, \ldots, x_n \in P,$$

plyne $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

(2) Množina vektorů $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ je *lineárně závislá*, jestliže není lineárně nezávislá.

Často se zjednodušeně a nepřesně říká, že nějaké vektory jsou lineárně (ne)závislé. Myslí se tím, že příslušná množina vektorů je lineárně (ne)závislá.