6. přednáška, 1. 11. 2022

3.3. Adjungovaná matice

Definice 3.3.1. Buď A čtvercová matice. Označme $\hat{A}$ matici kofaktorů $\hat{A}^i_j$. Matice $\hat{A}^\mathsf{T}$ je matice *adjungovaná* k matici A a značí se $\operatorname{adj} A$. Tedy,

$$\operatorname{adj} A = \hat{A}^\mathsf{T}.$$

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\operatorname{adj} A = \hat{A}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} \hat{A}^1_1 & \hat{A}^1_2 \\ \hat{A}^2_1 & \hat{A}^2_2 \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Tvrzení 3.3.1. *Pro libovolnou čtvercovou matici A*

$$\det A \cdot E = A \cdot \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \cdot A.$$

Je-li A regulární matice, pak

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

Důkaz. V i-tém řádku a j-tém sloupku matice $A \cdot \operatorname{adj} A$ je

$$(A \cdot \operatorname{adj} A)^i_j = \sum_k A^i_k (\hat{A}^\mathsf{T})^k_j = \sum_k A^i_k \hat{A}^j_k.$$

Pro $i = j$ je $(A \cdot \operatorname{adj} A)^i_i = \sum_k A^i_k \hat{A}^i_k = \det A$ podle Laplaceovy věty.

Je-li $i \neq j$, buď B matice, která z A vznikne tím, že j-tý řádek nahradíme i-tým řádkem. Potom

$$\begin{aligned} \sum_k A^i_k \hat{A}^j_k &= \sum_k B^i_k \hat{B}^j_k = && (B \text{ se liší od } A \text{ jen v } j\text{-tém řádku}) \\ &= \sum_k B^j_k \hat{B}^j_k = && (B^i_k = B^j_k) \\ &= \det B = && (\text{podle Laplaceovy věty}) \\ &= 0. && (B \text{ má dva stejné řádky}) \end{aligned}$$

Matice $A \cdot \operatorname{adj} A$ je tedy diagonální a všechny prvky na diagonále jsou rovny $\det A$, čili

$$A \cdot \operatorname{adj} A = \det A \cdot E.$$

Rovnost $\operatorname{adj} A \cdot A = \det A \cdot E$ dostaneme analogicky.

Je-li A regulární, pak $\det A \neq 0$, takže jím můžeme dělit a s použitím Tvrzení 2.4.3 dostaneme uvedený vztah. $\square$

Příklad. Mějme regulární matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Potom

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Například pro
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
dostaneme
$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

4. Soustavy lineárních rovnic

4.1. Soustavy lineárních rovnic a jejich řešení

Definice 4.1.1. Buďte $n \in \mathbb{N}$, P pole, $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in P$, $x^1, x^2, \dots, x^n \notin P$. Potom

$$a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = b$$

je *lineární rovnice nad polem P o n neznámých $x^1, x^2, \dots, x^n$* (nejsou to mocniny, jen horní indexy). Prvky $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in P$ jsou *koeficienty.*

Uvedenou lineární rovnici můžeme zapsat

$$\sum_{j=1}^{n} a_jx^j = b.$$

Definice 4.1.2. *Řešení* rovnice

$$a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = b$$

je každá uspořádaná n-tice $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$ prvků pole P taková, že platí rovnost

$$a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + \cdots + a_n\xi^n = b.$$

Při hledání řešení rovnice tedy hledáme prvky $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ pole P takové, že po dosazení ξ^i za x^i pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ se z rovnice stane rovnost.

Příklad. Nechť P je pole reálných čísel $\mathbb{R}$.

$$1 \cdot x^1 + 2 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 4 \cdot x^4 = 6$$

je lineární rovnice o čtyřech neznámých x^1, x^2, x^3, x^4. Řešení této rovnice jsou například $(6, 0, 1, 0)$, $(2, 2, 7, 0)$, $(-4, 3, 0, 1)$, ale nejsou to zdaleka všechna řešení. ■

Tvrzení 4.1.1. *Rovnice $ax = b$ nad polem P o jedné neznámé x, kde $a \neq 0$, má jediné řešení, a to $\xi = ba^{-1}$.*

Důkaz. Dosadíme-li $\xi = ba^{-1}$ za x, dostaneme $a\xi = aba^{-1} = b$, takže ξ je řešení.

Na druhou stranu, je-li ξ nějaké řešení, tedy $a\xi = b$, pak $\xi = \xi \cdot 1 = \xi(aa^{-1}) = (\xi a)a^{-1} = (a\xi)a^{-1} = ba^{-1}$. Čili každé řešení je rovno ba^{-1} a je tedy jediné. □

Příklad. Rovnice $3x = 6$ nad polem reálných čísel má jediné řešení $6 \cdot 3^{-1} = 2$. ■

Definice 4.1.3. Buďte $m, n, i, j \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, P pole, pro každé i, j nechť $a^i_j, b^i \in P$, $x^1, x^2, \dots, x^n \notin P$. Potom

$$\begin{aligned}
&a^1_1x^1 + a^1_2x^2 + \cdots + a^1_nx^n = b^1\\
&a^2_1x^1 + a^2_2x^2 + \cdots + a^2_nx^n = b^2\\
&\vdots\\
&a^m_1x^1 + a^m_2x^2 + \cdots + a^m_nx^n = b^m
\end{aligned}$$

je *soustava m lineárních rovnic nad polem P o n neznámých $x^1, \dots, x^n$.*

Uvedenou soustavu lineárních rovnic můžeme zapsat

$$\sum_{j=1}^{n} a^i_jx^j = b^i, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Označíme-li

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

můžeme soustavu lineárních rovnic psát jako rovnici

$$Ax = b.$$

Definice 4.1.4. Matice $A = (a_j^i)_{m\times n}$ je *matice soustavy*, $b = (b^i)_{m\times 1}$ je *sloupek pravých stran*, $x = (x^i)_{n\times 1}$ je *sloupek neznámých*. Matice

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & b^2 \\ \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m & b^m \end{pmatrix}$$

je *rozšířená matice soustavy.*

Definice 4.1.5. *Řešení* soustavy m lineárních rovnic o n neznámých je každá uspořádaná n-tice $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$ prvků pole P taková, že pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ platí rovnost

$$a_1^i\xi^1 + a_2^i\xi^2 + \dots + a_n^i\xi^n = b^i,$$

nebo při maticovém zápisu je to sloupková matice $\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \dots & \xi^n \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ taková, že platí rovnost

$$A\xi = b.$$

Součin Ax si můžeme rozepsat

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \dots + a_n^1x^n \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \dots + a_n^2x^n \\ \vdots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \dots + a_n^mx^n \end{pmatrix} = \\ &= x^1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix} + \dots + x^n \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix} = \\ &= x^1A_1^\circ + x^2A_2^\circ + \dots + x^nA_n^\circ \end{aligned}$$

a soustavu $Ax = b$ pak můžeme přepsat

$$x^1A_1^\circ + x^2A_2^\circ + \dots + x^nA_n^\circ = b.$$

Tedy, soustava lineárních rovnic $Ax = b$ má řešení právě tehdy, když existuje lineární kombinace sloupků matice A, která je rovna sloupku pravých stran b. Koeficienty takových lineárních kombinací tvoří jednotlivá řešení soustavy.

Jestliže soustava lineárních rovnic má nějaké řešení, tj. sloupek pravých stran je nějakou lineární kombinací sloupků matice soustavy, potom hodnost rozšířené matice soustavy je rovna hodnosti matice soustavy. Jestliže soustava nemá řešení, tj. sloupek pravých stran není lineární kombinací sloupků matice soustavy, potom hodnost rozšířené matice soustavy je o 1 větší než hodnost matice soustavy.

Množina všech řešení soustavy lineárních rovnic je průnik množin všech řešení jednotlivých rovnic soustavy.

Příklad. (1) Řešení lineární rovnice

$$a_1x^1 + a_2x^2 = b$$

s reálnými koeficienty o dvou neznámých x^1, x^2 jsou uspořádané dvojice (ξ^1, ξ^2) reálných čísel takové, že po jejich dosazení do rovnice za neznámé dostaneme rovnost. Množina všech řešení takové rovnice je tedy

$$\{(\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a_1\xi^1 + a_2\xi^2 = b\}$$

a bereme-li uspořádané dvojice jako body v rovině, tato množina je

- prázdná, tj. rovnice nemá řešení — pokud $a_1 = a_2 = 0$ a $b \neq 0$;
- přímka, tj. rovnice má nekonečně mnoho řešení — pokud aspoň jeden z koeficientů a_1, a_2 je nenulový;
- celá rovina, tj. rovnice má nekonečně mnoho řešení — pokud $a_1 = a_2 = b = 0$.

Je-li to přímka procházející dvěma body $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$ a označíme-li $w = u - v$, můžeme ji zapsat také parametricky

$$\begin{aligned}\{u + tw \,|\, t \in \mathbb{R}\} &= \{(u_1, u_2) + t(w_1, w_2) \,|\, t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(u_1 + tw_1, u_2 + tw_2) \,|\, t \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

(2) Množina všech řešení soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých je průnik množin všech řešení jednotlivých rovnic. Taková množina je tedy

- prázdná — pokud buď aspoň jedna rovnice nemá řešení, nebo množiny všech řešení dvou rovnic jsou rovnoběžné přímky, nebo množiny všech řešení tří rovnic jsou přímky s prázdným průnikem;
- jednoprvková — pokud množiny všech řešení dvou rovnic jsou přímky s jednoprvkovým průnikem, jehož prvek je řešením i všech ostatních rovnic soustavy;
- přímka — pokud to není celá rovina a všechny množiny všech řešení jednotlivých rovnic různé od celé roviny jsou tatáž přímka, tedy všechny rovnice jsou násobky jedné z nich;
- celá rovina — pokud všechny rovnice mají všechny koeficienty i pravé strany nulové, tedy $a^i_1 = a^i_2 = b^i = 0$ pro každé i.

(3) Řešení lineární rovnice o třech neznámých jsou uspořádané trojice, po jejichž dosazení do rovnice dostaneme rovnost, a bereme-li uspořádané trojice jako body v trojrozměrném prostoru, množina všech řešení je

- prázdná — pokud $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ a $b \neq 0$;
- rovina — pokud aspoň jeden z koeficientů a_1, a_2, a_3 je nenulový;
- celý trojrozměrný prostor — pokud $a_1 = a_2 = a_3 = b = 0$.

A také rovinu v prostoru můžeme vyjádřit parametricky.

(4) Množina všech řešení soustavy lineárních rovnic o třech neznámých může být

- prázdná;
- jednoprvková;
- přímka;
- rovina;
- celý trojrozměrný prostor.

(5) Řešení lineární rovnice o n neznámých jsou uspořádané n-tice a množina všech řešení je

- prázdná;
- „$(n-1)$-rozměrná rovina“, nazývá se *nadrovina* v n-rozměrném prostoru;
- celý n-rozměrný prostor.

Množina všech řešení soustavy lineárních rovnic o n neznámých je tedy případně průnik nadrovin v n-rozměrném prostoru. ■

Příklad. (1) Soustava

$$\begin{aligned} x^1 + 2x^2 - x^3 &= 1 \\ -x^1 + x^2 + 2x^3 &= 1 \\ 2x^1 - x^2 + x^3 &= 1 \end{aligned}$$

má právě jedno řešení, $(0{,}5, 0{,}5, 0{,}5)$, tj. $\xi^1 = \xi^2 = \xi^3 = 0{,}5$. Množina všech řešení je $\{(0{,}5, 0{,}5, 0{,}5)\}$.

(2) Mějme soustavu

$$x - y = 1,$$

tedy jednu rovnici o dvou neznámých x, y. Každá uspořádaná dvojice $(t, t-1)$, kde t je libovolné reálné číslo, je řešení soustavy, tj. $\xi^1 = t$, $\xi^2 = t - 1$ pro libovolné $t \in \mathbb{R}$. Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení a množina všech řešení je $\{(t, t-1) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

(3) Soustava

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

nemá žádné řešení, množina všech řešení je tedy prázdná množina $\emptyset$. ∎

4.2. Gaussova eliminační metoda a obecné řešení

Řešit soustavu lineárních rovnic, tj. hledat množinu všech jejích řešení, je možné tak, že soustavu upravíme na takový tvar, ze kterého všechna řešení vyčteme. Je ovšem nutné používat pouze takové úpravy, po jejichž provedení množina všech řešení nové soustavy je stejná jako množina všech řešení původní soustavy.

Definice 4.2.1. *Ekvivalentní úprava* soustavy lineárních rovnic je úprava, jejíž provedením vznikne soustava lineárních rovnic s množinou všech řešení rovnou množině všech řešení původní soustavy.

Soustavy lineárních rovnic, jejichž množiny všech řešení se vzájemně rovnají, jsou *ekvivalentní.*

Definice 4.2.2. *Elementární úpravy* soustavy lineárních rovnic jsou

(i) přičtení nějakého násobku jedné rovnice k jiné rovnici,
(ii) vynásobení některé rovnice nenulovým prvkem pole,
(iii) vzájemná výměna dvou rovnic.

Ke každé elementární úpravě soustavy existuje elementární úprava (stejného typu), která soustavu převede do původního stavu.

Je zřejmé, že provedení řádkové elementární úpravy rozšířené matice soustavy je totéž co provedení obdobné elementární úpravy soustavy.

Podle následujícího tvrzení elementární úpravy jsou ekvivalentní.

Tvrzení 4.2.1. *Elementární úpravy soustavy lineárních rovnic jsou ekvivalentní.*

Důkaz. Mějme soustavu lineárních rovnic o n neznámých $x^1, x^2, \dots, x^n$ a buď $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$ její řešení, tj. pro každé i platí rovnost

$$a^i_1\xi^1 + a^i_2\xi^2 + \cdots + a^i_n\xi^n = b^i.$$

Zvolme si jednu elementární úpravu, přičtení c-násobku j-té rovnice k i-té rovnici, kde $i \neq j$ (pro zbylé dvě úpravy je důkaz analogický). Po této úpravě dostaneme novou soustavu, která se od té původní liší jen v i-té rovnici, ta v nové soustavě je

$$(a^i_1 + ca^j_1)x^1 + \cdots + (a^i_n + ca^j_n)x^n = b^i + cb^j.$$

Je zřejmé, že ξ je řešením i této nové soustavy, protože je řešením nové i-té rovnice

$$\begin{aligned}&(a_1^i + ca_1^j)\xi^1 + \cdots + (a_n^i + ca_n^j)\xi^n = \\ &\quad = (a_1^i\xi^1 + \cdots + a_n^i\xi^n) + c(a_1^j\xi^1 + \cdots + a_n^j\xi^n) = \\ &\quad = b^i + cb^j\end{aligned}$$

i všech ostatních, nezměněných rovnic soustavy. To znamená, že každé řešení původní soustavy je řešením i upravené soustavy.

Při maticovém zápisu můžeme tvrzení dokázat s využitím toho, že řádková elementární úprava matice je totéž co vynásobení elementární maticí zleva. Úpravou soustavy $Ax = b$ dostaneme soustavu $QAx = Qb$. Jestliže ξ je řešením původní soustavy, tedy $A\xi = b$, potom $QA\xi = Qb$ a ξ je řešením i upravené soustavy.

Vzhledem k tomu, že upravenou soustavu můžeme převést na tu původní opět pomocí jedné z elementárních úprav, každé řešení upravené soustavy je také řešením původní soustavy. Celkově tedy množina všech řešení upravené soustavy je rovna množině všech řešení původní soustavy. □

Tvary soustavy lineárních rovnic, ze kterých lze snadno vyčíst všechna řešení soustavy, jsou ty, jejichž rozšířené matice jsou ve schodovitém a ještě lépe v Gaussově–Jordanově tvaru.

Gaussova eliminační metoda. Řádkovými elementárními úpravami upravme rozšířenou matici soustavy na Gaussův–Jordanův tvar (stačil by i schodovitý). Jestliže upravená rozšířená matice soustavy má více (o jeden) nenulových řádků než příslušná matice soustavy, soustava (upravená i původní) nemá řešení. Jestliže počty nenulových řádků upravené rozšířené matice soustavy i příslušné matice soustavy se rovnají r, tj. rozšířená matice soustavy a matice soustavy mají stejné hodnosti, příslušná soustava rovnic (uvádíme jen ty nenulové) je

$$\begin{aligned}x^1 + \cdots + \quad 0 \quad + \cdots + \quad 0 \quad + c^1_{k_r+1}x^{k_r+1} + \cdots + \quad c^1_n x^n &= d^1 \\ &\vdots \\ x^{k_{r-1}} + \cdots + \quad 0 \quad + c^{r-1}_{k_r+1}x^{k_r+1} + \cdots + c^{r-1}_n x^n &= d^{r-1} \\ x^{k_r} + c^r_{k_r+1}x^{k_r+1} + \cdots + \quad c^r_n x^n &= d^r.\end{aligned}$$

Z poslední rovnice můžeme pomocí $x^{k_r+1}, \dots, x^n$ vyjádřit

$$x^{k_r} = d^r - c^r_{k_r+1}x^{k_r+1} - \cdots - c^r_n x^n.$$

Z předposlední rovnice můžeme pomocí $x^{k_{r-1}+1}, \dots, x^{k_r-1}, x^{k_r+1}, \dots, x^n$ vyjádřit

$$x^{k_{r-1}} = d^{r-1} - c^{r-1}_{k_{r-1}+1}x^{k_{r-1}+1} - \cdots - c^{r-1}_{k_r-1}x^{k_r-1} - c^{r-1}_{k_r+1}x^{k_r+1} - \cdots - c^{r-1}_n x^n.$$

Takto můžeme postupovat až k první rovnici, ze které vyjádříme x^1 $(k_1 = 1)$ pomocí všech ostatních neznámých kromě $x^{k_2}, \dots, x^{k_r}$.

Získáme tak vyjádření r neznámých $x^{k_1}, x^{k_2}, \dots, x^{k_r}$ pomocí $n-r$ neznámých x^i s $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$. Když za neznámé x^i, $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$, zvolíme libovolné prvky pole P, které pak dosadíme do získaných vztahů pro neznámé $x^{k_1}, x^{k_2}, \dots, x^{k_r}$ a tyto hodnoty dopočítáme, dostaneme řešení soustavy $Ax = b$.

Definice 4.2.3. Neznámé $x^{k_1}, x^{k_2}, \dots, x^{k_r}$ z předchozího odstavce jsou *hlavní* (nebo *bázové* nebo *bázické*), neznámé x^i, kde $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$, jsou *parametry* (nebo *volné proměnné*) a označujeme je po řadě $t^1, \dots, t^{n-r}$.

Definice 4.2.4. Řešení soustavy lineárních rovnic o n neznámých, jejíž rozšířená matice má hodnost r, zapsané pomocí $n - r$ parametrů se nazývá *obecné řešení*. Řešení získané z obecného řešení libovolnou volbou parametrů se nazývá *partikulární řešení*.

Je zřejmé, že každé řešení soustavy lineárních rovnic lze získat z obecného řešení vhodnou volbou parametrů. Takže množina všech řešení získaných z obecného řešení všemi možnými volbami parametrů je rovna množině všech řešení soustavy.

Příklad. Mějme soustavu

$$\begin{aligned} x^1 + 2x^2 + 3x^3 &= 1 \\ 2x^1 + 3x^2 + 4x^3 &= 1 \\ 3x^1 + 4x^2 + 5x^3 &= 1 \end{aligned}$$

nad polem reálných čísel. Rozšířená matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Její Gaussův–Jordanův tvar je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a hodnost matice soustavy i hodnost rozšířené matice soustavy se rovnají 2. Uvedený Gaussův–Jordanův tvar reprezentuje soustavu

$$\begin{aligned} x^1 \qquad - x^3 &= -1 \\ x^2 + 2x^3 &= 1. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice můžeme vyjádřit x^2 pomocí x^3

$$x^2 = 1 - 2x^3$$

a z první rovnice můžeme vyjádřit x^1 pomocí x^3

$$x^1 = -1 + x^3.$$

Máme tedy 2 (= hodnost matice) neznámé vyjádřeny pomocí jedné ($= 3 - 2$) neznámé. Neznámé x^1 a x^2 jsou hlavní, neznámá x^3 je parametr a můžeme za ni dosadit libovolné reálné číslo a hlavní neznámé dopočítat. Označíme-li parametr t, dostaneme, že

$$(-1 + t, 1 - 2t, t), t \in \mathbb{R},$$

je obecné řešení soustavy. Při volbě $t = 0$ získáme partikulární řešení $(-1, 1, 0)$. Množina všech řešení soustavy je

$$\{(-1 + t, 1 - 2t, t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Uspořádanou trojici $(-1 + t, 1 - 2t, t)$ můžeme zapsat

$$\begin{aligned} (-1 + t, 1 - 2t, t) &= (-1, 1, 0) + (t, -2t, t) = \\ &= (-1, 1, 0) + t(1, -2, 1) \end{aligned}$$

a množinu všech řešení soustavy pak můžeme zapsat

$$\{(-1, 1, 0) + t(1, -2, 1) \,|\, t \in \mathbb{R}\},$$

což je přímka v $\mathbb{R}^3$ procházející bodem $(-1, 1, 0)$ se směrovým vektorem $(1, -2, 1)$. Při maticovém zápisu je množina všech řešení

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}. \qquad \blacksquare$$

4.3. Frobeniova věta

Z předchozích pozorování a tvrzení vyplývá následující věta.

Tvrzení 4.3.1 (Frobeniova věta)**.** *Soustava lineárních rovnic má aspoň jedno řešení právě tehdy, když hodnost matice soustavy se rovná hodnosti rozšířené matice soustavy.*

Důkaz. Jestliže soustava $Ax = b$ má nějaké řešení, pak sloupek b pravých stran je lineární kombinací sloupků matice A a rozšířením matice A o takový sloupek se hodnost nezmění. Takže matice A a $\bar{A}$ mají stejné hodnosti.

Jestliže se hodnosti matic A a $\bar{A}$ rovnají, a rovnají se tedy i hodnosti příslušných matic v Gaussově–Jordanově tvaru, pak použitím postupu z předchozí podkapitoly a libovolnou volbou parametrů získáme řešení soustavy. □

Příklad. (1) Soustava

$$\begin{aligned} x^1 + 2x^2 - x^3 &= 1 \\ -x^1 + x^2 + 2x^3 &= 1 \\ 2x^1 - x^2 + x^3 &= 1 \end{aligned}$$

má matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a rozšířenou matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jejich hodnosti jsou stejné, obě se rovnají 3, takže podle Frobeniovy věty soustava má řešení. Jelikož hodnosti jsou rovny počtu neznámých, všechny neznámé jsou hlavní, žádná není parametr a soustava má právě jedno řešení.

(2) Soustava

$$x - y = 1$$

má matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a rozšířenou matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jejich hodnosti jsou stejné, obě se rovnají 1, takže podle Frobeniovy věty soustava má řešení. Jelikož hodnosti jsou nižší než počet neznámých, jedna neznámá je hlavní, jedna neznámá je parametr a soustava má nekonečně mnoho řešení.

(3) Soustava

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

má matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a rozšířenou matici soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice soustavy je rovna 1 a hodnost rozšířené matice soustavy je rovna 2, takže podle Frobeniovy věty soustava nemá řešení. ■

4.4. Cramerovo pravidlo

Podle Frobeniovy věty soustava s regulární maticí má řešení. Podle následující věty má právě jedno řešení.

Tvrzení 4.4.1. *Soustava $Ax = b$ s regulární maticí A má právě jedno řešení*

$$\xi = A^{-1}b.$$

Důkaz. Buď A regulární matice, tedy čtvercová, invertibilní, s maximální hodností. Potom podle Frobeniovy věty soustava $Ax = b$ má řešení. A pro každé řešení ξ platí $A\xi = b$, tedy $\xi = A^{-1}A\xi = A^{-1}b$. □

Tvrzení 4.4.2 (Cramerovo pravidlo)**.** *Buď $Ax = b$ soustava s regulární maticí A a řešením $\xi = \begin{pmatrix}\xi^1 & \xi^2 & \dots & \xi^n\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$. Pak pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$*

$$\xi^i = \frac{\det A_i}{\det A},$$

kde A_i je matice vzniklá z matice A výměnou i-tého sloupku za sloupek pravých stran b:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots a_{i-1}^1 & b^1 & a_{i+1}^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & & & & & \\ a_1^n & \dots a_{i-1}^n & b^n & a_{i+1}^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Při rozvoji podle i-tého sloupku dostáváme $\det A_i = \sum_j \hat{A}_i^j b^j$. Dále

$$\xi = A^{-1}b = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} b = \frac{\hat{A}^{\mathsf{T}}}{\det A} b = \frac{\hat{A}^{\mathsf{T}} b}{\det A}$$

a tedy

$$\xi^i = \frac{\sum_j (\hat{A}^{\mathsf{T}})_j^i b^j}{\det A} = \frac{\sum_j \hat{A}_i^j b^j}{\det A} = \frac{\sum_j (\hat{A}_i)_i^j b^j}{\det A} = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

Tvrzení můžeme dokázat také takto: Je-li ξ řešení soustavy $Ax = b$, pak b je lineární kombinací sloupků A_i° s koeficienty $\xi^1, \dots, \xi^n$, tedy

$$b = \xi^1 A_1^\circ + \xi^2 A_2^\circ + \dots + \xi^n A_n^\circ = \sum_j \xi^j A_j^\circ$$

a matice A_i má v i-tém sloupku tuto lineární kombinaci všech sloupků matice A. Potom

$$\begin{aligned}
\det A_i &= \det \begin{pmatrix} A_1^\circ & \dots & A_{i-1}^\circ & b & A_{i+1}^\circ & \dots & A_n^\circ \end{pmatrix} = \\
&= \det \begin{pmatrix} A_1^\circ & \dots & A_{i-1}^\circ & \sum_j \xi^j A_j^\circ & A_{i+1}^\circ & \dots & A_n^\circ \end{pmatrix} = \\
&= \sum_j \det \begin{pmatrix} A_1^\circ & \dots & A_{i-1}^\circ & \xi^j A_j^\circ & A_{i+1}^\circ & \dots & A_n^\circ \end{pmatrix} = \\
&= \sum_j \xi^j \det \begin{pmatrix} A_1^\circ & \dots & A_{i-1}^\circ & A_j^\circ & A_{i+1}^\circ & \dots & A_n^\circ \end{pmatrix} = \\
&= \xi^i \det \begin{pmatrix} A_1^\circ & \dots & A_{i-1}^\circ & A_i^\circ & A_{i+1}^\circ & \dots & A_n^\circ \end{pmatrix} = \\
&= \xi^i \det A,
\end{aligned}$$

z čehož dostaneme požadovaný vztah. □

Příklad. Mějme soustavu

$$\begin{aligned} x^1 + 2x^2 - \ x^3 &= 1 \\ -x^1 + \ x^2 + 2x^3 &= 1 \\ 2x^1 - \ x^2 + \ x^3 &= 1. \end{aligned}$$

Potom

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a

$$\det A = 14 \qquad \det A_1 = 7 \qquad \det A_2 = 7 \qquad \det A_3 = 7.$$

Proto

$$\xi^1 = \xi^2 = \xi^3 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}.$$ ■

4.5. Homogenní soustavy lineárních rovnic

Definice 4.5.1. Soustava lineárních rovnic s nulovou pravou stranou, $b = 0$, se nazývá *homogenní.*

Příklad. (1) Soustava

$$\begin{aligned} x^1 + 2x^2 - \ x^3 &= 0 \\ -x^1 + \ x^2 + 2x^3 &= 0 \\ 2x^1 - \ x^2 + \ x^3 &= 0 \end{aligned}$$

je homogenní.

(2) Soustava

$$x^1 - x^2 + x^3 = 0$$

je homogenní.

(3) Soustava

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

není homogenní. ■

Tvrzení 4.5.1. *Každá homogenní soustava má řešení, nulové.*

Důkaz. Existence řešení vyplývá z Frobeniovy věty. Je zřejmé, že dosazením nuly za všechny neznámé získáme řešení. □

Předchozí tvrzení netvrdí, že nulové řešení je jediné.

Tvrzení 4.5.2. *Lineární kombinace řešení homogenní soustavy je také řešení té soustavy. Speciálně, nulový sloupek je řešení, součet řešení je řešení a c-násobek řešení je řešení.*

Důkaz. Nechť ξ_1, ξ_2 jsou řešení, $\alpha_1, \alpha_2 \in P$. Tedy, $A\xi_1 = 0$ a $A\xi_2 = 0$. Potom

$$A(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2) = \alpha_1 A\xi_1 + \alpha_2 A\xi_2 = 0$$

a lineární kombinace řešení je tedy také řešení soustavy. □

Definice 4.5.2. *Fundamentální systém řešení* homogenní soustavy je taková množina řešení homogenní soustavy, která je lineárně nezávislá a každé řešení lze vyjádřit jako lineární kombinaci řešení z této množiny.

Tvrzení 4.5.3. *Fundamentální systém řešení soustavy rovnic $Ax = 0$ o n neznámých má $n - \operatorname{rank} A$ prvků.*

Důkaz. Obecné řešení soustavy $Ax = 0$ o n neznámých je vyjádřeno pomocí $n - \operatorname{rank} A$ parametrů $t^1, \dots, t^{n-\operatorname{rank} A}$. Provedeme-li $n - \operatorname{rank} A$ voleb parametrů

$$(t^1, \dots, t^{n-\operatorname{rank} A}) = (1, 0, \dots, 0),$$
$$(t^1, \dots, t^{n-\operatorname{rank} A}) = (0, 1, \dots, 0),$$
$$\dots$$
$$(t^1, \dots, t^{n-\operatorname{rank} A}) = (0, \dots, 0, 1),$$

dostaneme množinu řešení s požadovanými vlastnostmi. □

Příklad. (1) Soustava

$$x^1 - x^2 = 0$$

má 2 neznámé, matice soustavy má hodnost 1 a množina všech řešení soustavy je $\{(t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Fundamentální systém řešení soustavy je například $\{(1, 1)\}$.

(2) Soustava

$$\begin{aligned} x^1 + x^2 + 2x^3 &= 0 \\ -x^1 + x^2 + 2x^3 &= 0 \\ x^1 + 3x^2 + 6x^3 &= 0 \end{aligned}$$

má 3 neznámé, matice soustavy má hodnost 2 a množina všech řešení soustavy je $\{(0, -2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(0, -2, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Fundamentální systém řešení soustavy je například $\{(0, -2, 1)\}$.

(3) Soustava

$$x^1 - x^2 + x^3 = 0$$

má 3 neznámé, matice soustavy má hodnost 1 a množina všech řešení soustavy je $\{(s - t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \{s(1, 1, 0) - t(-1, 0, 1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. Fundamentální systém řešení soustavy je například $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

(4) Soustava

$$\begin{aligned} x^1 + 2x^2 &= 0 \\ 3x^1 + 4x^2 &= 0 \end{aligned}$$

má 2 neznámé, matice soustavy má hodnost 2 a soustava má jediné řešení, čili množina všech řešení soustavy je $\{(0, 0)\}$. Fundamentální systém řešení soustavy je $\emptyset$.

(5) Soustava

$$0x = 0$$

má 1 neznámou, matice soustavy má hodnost 0 a množina všech řešení soustavy je $\{t \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$. Fundamentální systém řešení soustavy je například $\{6\}$. ■