5. přednáška, 25. 10. 2022

3.2. Determinant

3.2.1. Definice a determinanty některých typů matic

Definice 3.2.1. Buď A matice typu $n \times n$ nad polem P. *Determinant* matice A je

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A^1_{\sigma_1} A^2_{\sigma_2} \cdots A^n_{\sigma_n} \in P.$$

Číslo n je *řád* determinantu.

Pro determinant matice A se používá značení

$$\det A = |A| = \det \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \dots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \dots & A^n_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \dots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \dots & A^n_n \end{vmatrix}.$$

Díky tomu, že σ je permutace (bijektivní zobrazení) na množině I_n, můžeme ji chápat jako zobrazení z množiny všech řádkových indexů do množiny všech sloupkových indexů matice A. Ke každému řádku je tedy vzájemně jednoznačně přiřazen sloupek a v každém součinu $A^1_{\sigma_1} \cdot A^2_{\sigma_2} \cdots A^n_{\sigma_n}$ je tedy právě jeden prvek z každého řádku a právě jeden prvek z každého sloupku. Determinant matice A je tedy součet všech takovýchto součinů (pro všechny permutace σ na množině I_n) opatřených buď znaménkem $+$, jde-li o sudou permutaci, nebo znaménkem $-$, jde-li o lichou permutaci.

Příklad. (1) Nechť $n = 1$. Tedy, $I_1 = \{1\}$, $S_1 = \{\mathrm{id}\colon \{1\} \to \{1\}\}$ a $\operatorname{sgn} \mathrm{id} = 1$. Pro matici $A = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$ je $\det A = \operatorname{sgn} \mathrm{id} \cdot A^1_{\mathrm{id}_1} = 1 \cdot A^1_1 = a$.

(2) Nechť $n = 2$. Tedy, $I_2 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{\mathrm{id}, \tau\}$, kde $\mathrm{id} = (1, 2)$ a $\tau = (2, 1)$ (viz zápis permutace na I_n), $\operatorname{sgn} \mathrm{id} = 1$ a $\operatorname{sgn} \tau = -1$. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

je $\det A = \operatorname{sgn} \mathrm{id} \cdot A^1_{\mathrm{id}_1} A^2_{\mathrm{id}_2} + \operatorname{sgn} \tau \cdot A^1_{\tau_1} A^2_{\tau_2} = 1 \cdot A^1_1 A^2_2 + (-1) \cdot A^1_2 A^2_1 = ad - bc$. Vzorec pro výpočet determinantu matice druhého řádu je možno odvodit z následujícího obrázku:

$$\oplus \qquad \ominus$$

$$\begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & A^2_2 \end{vmatrix} = A^1_1 A^2_2 - A^1_2 A^2_1$$

(3) Nechť $n = 3$. Tedy, $I_3 = \{1, 2, 3\}$, $S_3 = \{\mathrm{id}, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, kde $\mathrm{id} = (1, 2, 3)$, $\sigma_1 = (2, 3, 1)$, $\sigma_2 = (3, 1, 2)$, $\tau_1 = (1, 3, 2)$, $\tau_2 = (3, 2, 1)$, $\tau_3 = (2, 1, 3)$ (viz zápis permutace na I_n), $\operatorname{sgn} \mathrm{id} = \operatorname{sgn} \sigma_1 = \operatorname{sgn} \sigma_2 = 1$ a $\operatorname{sgn} \tau_1 = \operatorname{sgn} \tau_2 = \operatorname{sgn} \tau_3 = -1$. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

je

$$\begin{aligned}
\det A &= \operatorname{sgn}\mathrm{id}\cdot A^1_{\mathrm{id}_1}A^2_{\mathrm{id}_2}A^3_{\mathrm{id}_3} + \operatorname{sgn}\sigma_1\cdot A^1_{\sigma_1(1)}A^2_{\sigma_1(2)}A^3_{\sigma_1(3)}+\\
&\quad+\operatorname{sgn}\sigma_2\cdot A^1_{\sigma_2(1)}A^2_{\sigma_2(2)}A^3_{\sigma_2(3)} + \operatorname{sgn}\tau_1\cdot A^1_{\tau_1(1)}A^2_{\tau_1(2)}A^3_{\tau_1(3)}+\\
&\quad+\operatorname{sgn}\tau_2\cdot A^1_{\tau_2(1)}A^2_{\tau_2(2)}A^3_{\tau_2(3)} + \operatorname{sgn}\tau_3\cdot A^1_{\tau_3(1)}A^2_{\tau_3(2)}A^3_{\tau_3(3)} =\\
&= 1\cdot A^1_1A^2_2A^3_3 + 1\cdot A^1_2A^2_3A^3_1 + 1\cdot A^1_3A^2_1A^3_2+\\
&\quad+(-1)\cdot A^1_1A^2_3A^3_2 + (-1)\cdot A^1_3A^2_2A^3_1 + (-1)\cdot A^1_2A^2_1A^3_3 =\\
&= aei + bfg + cdh - afh - ceg - bdi.
\end{aligned}$$

Vzorec pro výpočet determinantu matice třetího řádu lze odvodit z následujího obrázku pomocí *Sarrusova pravidla* (pro matice vyššího řádu žádné takové pravidlo neexistuje):

$$\begin{array}{ccc}
\oplus & & \ominus\\
\oplus & & \ominus\\
\oplus & & \ominus
\end{array}
\quad
\begin{array}{|ccc|}
A^1_1 & A^1_2 & A^1_3\\
A^2_1 & A^2_2 & A^2_3\\
A^3_1 & A^3_2 & A^3_3\\
\hline
\end{array}
\begin{array}{c}\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
A^1_1 & A^1_2 & A^1_3\\
A^2_1 & A^2_2 & A^2_3
\end{array}$$

$$= \quad A^1_1A^2_2A^3_3 + A^1_2A^2_3A^3_1 + A^1_3A^2_1A^3_2 - \\ - A^1_1A^2_3A^3_2 - A^1_3A^2_2A^3_1 - A^1_2A^2_1A^3_3$$

(4) Nechť $n = 4$. Na čtyřprvkové množině existují 24 permutace, takže při výpočtu determinantu podle definice dostaneme 24 sčítance. Uvedeme si i jiné způsoby výpočtu determinantu. ■

Cvičení. Spočtěte determinanty matic

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&6\\2&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&5\\5&6&7\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&2\\5&6&7\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&4&6\\3&4&5\\5&6&7\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}3&4&5\\1&2&3\\5&6&7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\3&4&5\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&3\\1&0&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&3&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&3&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&2\\0&0&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\1&2&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&2\\4&5&5\\7&8&8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&0\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&0\\0&4&0\\0&5&6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&3\\1&-4&3\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&3\\1&2&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&0\\4&5&6\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\4&5&6\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\\4&5&6\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\4&5&6\end{pmatrix}$$ ▷

Tvrzení 3.2.1. *Determinant matice s nulovým řádkem nebo nulovým sloupkem je roven nule.*

Důkaz. Buď A matice typu $n \times n$ s nulovým řádkem nebo nulovým sloupkem. Pro každé $\sigma \in S_n$ je v součinu $A^1_{\sigma_1} A^2_{\sigma_2} \cdots A^n_{\sigma_n}$ právě jeden prvek z každého, tedy i nulového řádku a právě jeden prvek z každého, tedy i nulového sloupku. Proto je každý takový součin roven nule. □

Cvičení. Dokažte, že pro determinanty lišící se pouze v jednom řádku platí

$$\begin{vmatrix}A^1_1 & \dots & A^1_n\\ & \dots & \\ A^i_1 & \dots & A^i_n\\ & \dots & \\ A^n_1 & \dots & A^n_n\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}A^1_1 & \dots & A^1_n\\ & \dots & \\ B^i_1 & \dots & B^i_n\\ & \dots & \\ A^n_1 & \dots & A^n_n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}A^1_1 & \dots & A^1_n\\ & \dots & \\ A^i_1 + B^i_1 & \dots & A^i_n + B^i_n\\ & \dots & \\ A^n_1 & \dots & A^n_n\end{vmatrix}.$$ ▷

Příklad.

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\1&0&0\\4&5&6\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&0\\4&5&6\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1&2&3\\0&0&1\\4&5&6\end{vmatrix} = 3 + (-6) + 3 = 0 = \begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&1\\4&5&6\end{vmatrix}.$$ ■

Definice 3.2.2. Čtvercová matice je (*horní* resp. *dolní*) *trojúhelníková* (nebo v (*horním* resp. *dolním*) *trojúhelníkovém tvaru*), jestliže pod resp. nad diagonálou má jen nuly, tedy $A^i_j = 0$ pro $i > j$ resp. pro $i < j$.

Každá čtvercová matice ve schodovitém tvaru je také v (horním) trojúhelníkovém tvaru a tedy každou čtvercovou matici lze pomocí řádkových elementárních úprav převést na trojúhelníkový tvar.

Tvrzení 3.2.2. *Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na diagonále.*

Důkaz. Buď A horní trojúhelníková matice typu $n \times n$. Buď σ permutace na množině I_n. Jestliže pro nějaké $i \in I_n$ platí $\sigma_i < i$, pak $A^i_{\sigma_i}$ je pod diagonálou, tedy $A^i_{\sigma_i} = 0$ a také $\operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \cdots A^i_{\sigma_i} \cdots A^n_{\sigma_n} = 0$. Jediná permutace σ taková, že $\sigma_i \geq i$ pro každé i, je identita. Jelikož $\operatorname{sgn} \mathrm{id} = 1$, $\det A = A^1_1 A^2_2 \cdots A^n_n$.

Pro dolní trojúhelníkové matice je důkaz analogický. □

Důsledek. *(1) Determinant matice ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků na diagonále.*

(2) Determinant diagonální matice je roven součinu prvků na diagonále.

(3) Determinant jednotkové matice je roven 1.

Příklad.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24. \qquad \blacksquare$$

Determinanty elementárních matic jsou nenulové.

Příklad. (1) $E^{i,j}(c)$ je trojúhelníková matice a na diagonále má jen jedničky, proto

$$\det E^{i,j}(c) = 1.$$

(2) $E^i(c)$ je diagonální matice a na diagonále má jedno c a jinak jen jedničky, proto

$$\det E^i(c) = c.$$

(3) Jelikož v každém řádku a v každém sloupku matice $E^{i,j}$ je právě jedna jednička a ostatní prvky jsou nuly, existuje jediná permutace τ na I_n, pro kterou jsou všechny $(E^{i,j})^1_{\tau_1}, \dots, (E^{i,j})^n_{\tau_n}$ rovny jedné. Pro ostatní permutace je aspoň jeden z těchto prvků nulový. Díky tvaru $E^{i,j}$ je τ transpozice, takže $\sin \tau = -1$. Proto

$$\det E^{i,j} = (-1) \cdot (E^{i,j})^1_{\tau_1} \cdots (E^{i,j})^n_{\tau_n} = -1. \qquad \blacksquare$$

Tvrzení 3.2.3. *Pro každou čtvercovou matici A platí* $\det A^\mathsf{T} = \det A$.

Důkaz. Činitele v součinu $A_1^{\sigma_1} \dots A_i^{\sigma_i} \dots A_n^{\sigma_n}$ můžeme uspořádat podle vzrůstajícího řádkového indexu $A^1_{\sigma_1^{-1}} \dots A^i_{\sigma_i^{-1}} \dots A^n_{\sigma_n^{-1}}$, protože σ_i^{-1}-tý činitel v původním součinu je $A^{\sigma_{\sigma_i^{-1}}}_{\sigma_i^{-1}} = A^i_{\sigma_i^{-1}}$. Potom

$$\begin{aligned}
\det A^\mathsf{T} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot (A^\mathsf{T})^1_{\sigma_1} \dots (A^\mathsf{T})^i_{\sigma_i} \dots (A^\mathsf{T})^n_{\sigma_n} = \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_1^{\sigma_1} \dots A_i^{\sigma_i} \dots A_n^{\sigma_n} = \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A^1_{\sigma_1^{-1}} \dots A^i_{\sigma_i^{-1}} \dots A^n_{\sigma_n^{-1}} = && \text{(přeuspořádání)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma^{-1} \cdot A^1_{\sigma_1^{-1}} \dots A^i_{\sigma_i^{-1}} \dots A^n_{\sigma_n^{-1}} = && (\operatorname{sgn} \sigma^{-1} = \operatorname{sgn} \sigma) \\
&= \det A,
\end{aligned}$$

protože když σ projde všechny prvky S_n, tak σ^{-1} také. $\square$

Tvrzení 3.2.4. *Determinant matice, která má buď dva řádky stejné nebo dva sloupky stejné, je roven nule.*

Důkaz. Buď A matice typu $n \times n$, která má i-tý řádek stejný jako j-tý $(i \neq j)$, tedy $A^i_k = A^j_k$ pro každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Buď $\tau_{ij} \in S_n$ transpozice vyměňující i, j, čili $\operatorname{sgn} \tau_{ij} = -1$. Pro každou permutaci $\sigma \in S_n$ označme $\sigma' = \sigma \circ \tau_{ij}$. Pak $\operatorname{sgn} \sigma' = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \tau_{ij} = -\operatorname{sgn} \sigma$ a člen determinantu odpovídající permutaci σ' je

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sgn} \sigma' \cdot A^1_{\sigma'_1} \cdots A^i_{\sigma'_i} \cdots A^j_{\sigma'_j} \cdots A^n_{\sigma'_n} = \\
&\quad = -\operatorname{sgn} \sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \cdots A^i_{\sigma_j} \cdots A^j_{\sigma_i} \cdots A^n_{\sigma_n} = \\
&\quad = -\operatorname{sgn} \sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \cdots A^i_{\sigma_i} \cdots A^j_{\sigma_j} \cdots A^n_{\sigma_n}, && (A^i_{\sigma_j} = A^j_{\sigma_j} \text{ a } A^j_{\sigma_i} = A^i_{\sigma_i})
\end{aligned}$$

a je tedy opačný k členu odpovídajícímu permutaci σ.

Množinu S_n, která má sudý počet prvků, můžeme rozložit na podmnožiny $\{\sigma, \sigma'\}$, které jsou dvouprvkové, protože $\sigma' \neq \sigma$ a $\sigma'' = \sigma$ (ověřte), a každá z nich přispívá k determinantu nulou. Takže $\det A = 0$.

Když má matice dva stejné sloupky, lze tvrzení dokázat analogicky nebo je možno použít předchozí tvrzení. $\square$

3.2.2. Elementární úpravy

Tvrzení 3.2.5. *(1) Přičtením násobku jednoho řádku, resp. sloupku k jinému řádku, resp. sloupku se determinant nezmění.*

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i + cA_1^j & A_2^i + cA_2^j & \dots & A_n^i + cA_n^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix}.$$

(2) Vynásobením jednoho řádku, nebo sloupku prvkem c se determinant vynásobí prvkem c.

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ cA_1^i & cA_2^i & \dots & cA_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix}.$$

(3) Vzájemnou výměnou dvou řádků, nebo dvou sloupků determinant změní znaménko.

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^j & A_2^j & \dots & A_n^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^i & A_2^i & \dots & A_n^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^j & A_2^j & \dots & A_n^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix}.$$

Důkaz. Uvedeme pouze důkaz pro řádkové úpravy, pro sloupkové je analogický.

Buďte A čtvercová matice a B upravená matice.

(1) Nechť B vznikne z A přičtením c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku, čili $B_\circ^i = A_\circ^i + cA_\circ^j$ a ostatní řádky matice B jsou stejné jako řádky matice A. Potom

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot B_{\sigma_1}^1 \dots B_{\sigma_i}^i \dots B_{\sigma_j}^j \dots B_{\sigma_n}^n = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots (A_{\sigma_i}^i + cA_{\sigma_i}^j) \dots A_{\sigma_j}^j \dots A_{\sigma_n}^n = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_i}^i \dots A_{\sigma_j}^j \dots A_{\sigma_n}^n + \\ &\quad + c \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A_{\sigma_1}^1 \dots A_{\sigma_i}^j \dots A_{\sigma_j}^j \dots A_{\sigma_n}^n}_{\text{determinant matice, kde } i\text{-tý řádek je stejný jako } j\text{-tý}} = \\ &= \det A + c \cdot 0 = \det A. \end{aligned}$$

(2) Nechť B vznikne z A vynásobením i-tého řádku prvkem c, čili $B^i_\circ = cA^i_\circ$ a ostatní řádky matice B jsou stejné jako řádky matice A. Potom

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot B^1_{\sigma_1}\dots B^i_{\sigma_i}\dots B^n_{\sigma_n} = \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1}\dots cA^i_{\sigma_i}\dots A^n_{\sigma_n} = \\
&= c\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1}\dots A^i_{\sigma_i}\dots A^n_{\sigma_n} = \\
&= c\det A.
\end{aligned}$$

(3) Nechť B vznikne z A vzájemnou výměnou i-tého řádku a j-tého řádku, čili $B^i_\circ = A^j_\circ$, $B^j_\circ = A^i_\circ$ a ostatní řádky matice B jsou stejné jako řádky matice A. Buď $\tau_{ij} \in S_n$ transpozice vyměňující i, j, čili $\operatorname{sgn}\tau_{ij} = -1$. Pro každou permutaci $\sigma \in S_n$ označme $\sigma' = \sigma\circ\tau_{ij}$. Pak $\sigma'_i = \sigma_j$, $\sigma'_j = \sigma_i$ a $\sigma'_k = \sigma_k$ pro $k \neq i, j$ a $\operatorname{sgn}\sigma' = \operatorname{sgn}\sigma\cdot\operatorname{sgn}\tau_{ij} = -\operatorname{sgn}\sigma$. Potom

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot B^1_{\sigma_1}\dots B^i_{\sigma_i}\dots B^j_{\sigma_j}\dots B^n_{\sigma_n} = \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1}\dots A^j_{\sigma_i}\dots A^i_{\sigma_j}\dots A^n_{\sigma_n} = \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1}\dots A^i_{\sigma_j}\dots A^j_{\sigma_i}\dots A^n_{\sigma_n} = \qquad \text{(komutativita násobení)}\\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma'_1}\dots A^i_{\sigma'_i}\dots A^j_{\sigma'_j}\dots A^n_{\sigma'_n} = \\
&= -\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma' \cdot A^1_{\sigma'_1}\dots A^i_{\sigma'_i}\dots A^j_{\sigma'_j}\dots A^n_{\sigma'_n} = \qquad (\operatorname{sgn}\sigma^{-1} = \operatorname{sgn}\sigma)\\
&= -\det A,
\end{aligned}$$

protože když σ projde všechny prvky S_n, tak σ' také. □

Cvičení. Jaký je vztah mezi $\det(cA)$ a $\det A$? ▷

Cvičení. Nechť A je matice typu $n \times n$ taková, že $A^\mathsf{T} = -A$ (taková matice se nazývá *antisymetrická*). Ukažte, že je-li n liché číslo, pak $\det A = 0$. ▷

Příklad.

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\4&4&4&8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\3&3&6&6\\4&4&4&8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&4&4&4\\3&3&6&6\\4&4&4&8\end{vmatrix}$$

$$4\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}4&4&4&4\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&8&8&8\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&12&12\\0&0&0&4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&16\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix}0&0&0&4\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\1&1&1&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&0&0&4\\0&0&3&3\\0&2&2&2\\1&1&1&1\end{vmatrix}$$ ■

Důsledek. *Buďte Q elementární matice a A matice stejného typu. Pak*

$$\det QA = \det Q \cdot \det A.$$

Důkaz. (1) $\det(E^{i,j}(c)A) = \det A = 1 \cdot \det A = \det E^{i,j}(c) \cdot \det A$.

(2) $\det(E^{i}(c)A) = c \det A = \det E^{i}(c) \cdot \det A$.

(3) $\det(E^{i,j}A) = (-1) \cdot \det A = \det E^{i,j} \cdot \det A$. □

Cvičení. Dokažte, že $\det E^{i,j} = -1$ s využitím předchozího důsledku a toho, že vzájemná výměna dvou řádků je složením konečně mnoha řádkových elementárních úprav ostatních druhů. ▷

Tvrzení 3.2.6. *Matice je regulární právě tehdy, když má nenulový determinant.*

Důkaz. Buď A regulární matice, tedy $A = Q_1 \cdots Q_k$, kde $Q_1, \dots, Q_k$ jsou elementární matice. Potom

$$\begin{aligned}\det A &= \det(Q_1 \cdots Q_k) = \det Q_1 \cdot \det(Q_2 \cdots Q_k) = \cdots = \\ &= \det Q_1 \cdot \det Q_2 \cdots \det Q_k,\end{aligned}$$

což není rovno nule, protože determinanty elementárních matic jsou nenulové.

Nechť $\det A \neq 0$. Pomocí řádkových elementárních úprav převedeme A na schodovitý tvar B, tedy $B = Q_k \cdots Q_1 A$, kde $Q_1, \dots, Q_k$ jsou příslušné elementární matice. Potom

$$\begin{aligned}\det B &= \det(Q_k \cdots Q_1 A) = \det Q_k \det(Q_{k-1} \cdots Q_1 A) = \cdots = \\ &= \det Q_k \det Q_{k-1} \cdots \det Q_1 \det A \neq 0.\end{aligned}$$

Jelikož B je ve schodovitém tvaru a její determinant je tedy součinem prvků na diagonále, na diagonále není žádná nula. To znamená, že B nemá nulový řádek, je tedy regulární a A také. □

Důsledek. *Matice je regulární právě tehdy, když má nenulový determinant, a to má právě tehdy, když je invertibilní, a to je právě tehdy, když je ekvivalentní jednotkové matici.*

Tvrzení 3.2.7 (Cauchyho věta)**.** *Buďte A, B čtvercové matice stejného typu. Pak*

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

Důkaz. (1) Je-li A regulární, tedy součin $Q_1 Q_2 \cdots Q_k$ elementárních matic, pak

$$\begin{aligned}\det AB &= \det(Q_1 \cdots Q_k B) = \det Q_1 \cdot \det(Q_2 \cdots Q_k B) = \cdots = \\ &= \det Q_1 \det Q_2 \cdots \det Q_k \det B = \det(Q_1 Q_2 \cdots Q_k) \det B = \\ &= \det A \det B.\end{aligned}$$

(2) Je-li A singulární, podle Tvrzení 2.5.5 je AB také singulární a tedy

$$\det AB = 0 = \det A = \det A \cdot \det B.$$ □

Cvičení. $\det A^{-1} = 1/\det A$. ▷

Lemma 3.2.8.

$$\begin{vmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_k & A^1_{k+1} & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^k_1 & \dots & A^k_k & A^k_{k+1} & \dots & A^k_n \\ 0 & \dots & 0 & A^{k+1}_{k+1} & \dots & A^{k+1}_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A^n_{k+1} & \dots & A^n_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_k \\ \vdots & & \vdots \\ A^k_1 & \dots & A^k_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A^{k+1}_{k+1} & \dots & A^{k+1}_n \\ \vdots & & \vdots \\ A^n_{k+1} & \dots & A^n_n \end{vmatrix}.$$

Determinant matice A v předchozím tvrzení se *rozpadá na subdeterminanty*: jeden subdeterminant řádu k a jeden subdeterminant řádu $n-k$. Stručně ale výstižně lze toto tvrzení vyjádřit zápisem

$$\begin{vmatrix} A' & X \\ 0 & A'' \end{vmatrix} = |A'| \cdot |A''|.$$

Příklad.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot 8 = 2 \cdot 1 \cdot 8 = 16$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 \cdot (-2) = 6 \quad \blacksquare$$

3.2.3. Laplaceův rozvoj

Definice 3.2.3. Buď A matice typu $n \times n$. Determinant řádu $n-1$ matice vzniklé z A vynecháním jednoho řádku a jednoho sloupku se nazývá *minor*. Při vynechání i-tého řádku a j-tého sloupku příslušný minor označujeme

$$\bar{A}^i_j.$$

Kofaktor (nebo *algebraický doplněk*) prvku A^i_j je

$$\hat{A}^i_j = (-1)^{i+j} \bar{A}^i_j.$$

Tedy, kofaktor (algebraický doplněk) prvku A^i_j je $(-1)^{i+j}$-násobek determinantu matice, která vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupku.

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\bar{A}^1_1 = d, \quad \bar{A}^1_2 = c, \quad \bar{A}^2_1 = b, \quad \bar{A}^2_2 = a,$$

$$\begin{aligned} \hat{A}^1_1 &= (-1)^{1+1} \bar{A}^1_1 = d, & \hat{A}^1_2 &= (-1)^{1+2} \bar{A}^1_2 = -c, \\ \hat{A}^2_1 &= (-1)^{2+1} \bar{A}^2_1 = -b, & \hat{A}^2_2 &= (-1)^{2+2} \bar{A}^2_2 = a. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\bar{A}^1_1 = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}, \quad \bar{A}^1_2 = \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}, \quad \bar{A}^1_3 = \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \bar{A}^3_3 = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \hat{A}^1_1 &= (-1)^{1+1} \bar{A}^1_1 = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}, & \hat{A}^1_2 &= (-1)^{1+2} \bar{A}^1_2 = -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}, \\ \hat{A}^1_3 &= (-1)^{1+3} \bar{A}^1_3 = \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}, & \hat{A}^3_3 &= (-1)^{3+3} \bar{A}^3_3 = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Tvrzení 3.2.9 (Laplaceova věta o rozvoji determinantu)**.** *Buď A matice typu $n \times n$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí*

$$\begin{aligned} \det A &= A^i_1 \hat{A}^i_1 + A^i_2 \hat{A}^i_2 + \dots + A^i_n \hat{A}^i_n = \sum_{j=1}^{n} A^i_j \hat{A}^i_j = \\ &= A^1_i \hat{A}^1_i + A^2_i \hat{A}^2_i + \dots + A^n_i \hat{A}^n_i = \sum_{j=1}^{n} A^j_i \hat{A}^j_i . \end{aligned}$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_{j-1} & A^1_j & A^1_{j+1} & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^i_1 & \dots & A^i_{j-1} & A^i_j & A^i_{j+1} & \dots & A^i_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_{j-1} & A^n_j & A^n_{j+1} & \dots & A^n_n \end{vmatrix} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_{j-1} & A^1_j & A^1_{j+1} & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A^i_j & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_{j-1} & A^n_j & A^n_{j+1} & \dots & A^n_n \end{vmatrix} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} A^i_j \begin{vmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_{j-1} & A^1_j & A^1_{j+1} & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_{j-1} & A^n_j & A^n_{j+1} & \dots & A^n_n \end{vmatrix} . \end{aligned}$$

Ukažme, že

$$\begin{vmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_{j-1} & A^1_j & A^1_{j+1} & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_{j-1} & A^n_j & A^n_{j+1} & \dots & A^n_n \end{vmatrix} = \hat{A}^i_j .$$

Vyměňujme i-tý řádek $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ s předchozími řádky tak dlouho, až bude prvním řádkem; k tomu je potřeba $i-1$ výměn. Poté vyměňujme j-tý sloupek $\begin{pmatrix} 1 & A^1_j & \dots & A^{i-1}_j & A^{i+1}_j & \dots & A^n_j \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ s předchozími sloupky tak dlouho, až bude prvním sloupkem; k tomu je potřeba $j-1$ výměn. Takto vzniklý determinant je tedy nutné vynásobit číslem $(-1)^{i-1}(-1)^{j-1} = (-1)^{i-1+j-1} = (-1)^{i+j}$ a navíc se rozpadá na subdeterminanty $\det(1)$ a $\bar{A}^i_j$. Proto $\det A = \sum_{j=1}^{n} A^i_j \cdot (-1)^{i+j} \bar{A}^i_j = \sum_{j=1}^{n} A^i_j \hat{A}^i_j$ a máme rozvoj podle i-tého řádku.

Rozvoj podle i-tého sloupku získáme analogicky. □

Definice 3.2.4. Vztah v Laplaceově větě se nazývá *Laplaceův rozvoj podle i-tého řádku* resp. *podle i-tého sloupku.*

Příklad.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + (-2) = 6 \quad \blacksquare$$