4. přednáška, 11. 10. 2022

2.5.2. Hodnost matice

Definice 2.5.2. *Hodnost* matice je maximální počet prvků lineárně nezávislých množin jejích řádků. Hodnost matice A značíme $\operatorname{rank} A$.

Mějme matici A typu $m \times n$ s řádky $A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ$. Vezmeme všechny možné množiny těchto řádků, čili prázdnou množinu $\emptyset$, jednoprvkové množiny $\{A^1_\circ\}, \{A^2_\circ\}, \dots, \{A^m_\circ\}$, dvouprvkové množiny $\{A^1_\circ, A^2_\circ\}, \dots, \{A^{m-1}_\circ, A^m_\circ\}$, ..., až množinu $\{A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ\}$. Z těchto množin vybereme ty, které jsou lineárně nezávislé. U kažné z nich si poznamenáme počet prvků a maximální z těchto počtů je hodnost matice A.

Hodnost matice s m řádky je tedy jedno z čísel $0, 1, \dots, m$.

Příklad. (1) Hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je rovna 3. Ověřte.

(2) Hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je rovna 2. Ověřte.

(3) Hodnost nulové matice je rovna 0, hodnost nenulové matice je kladná.

(4) Hodnost diagonální matice je rovna počtu jejích nenulových řádků. ■

Cvičení. Spočtěte hodnosti matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

▷

Tvrzení 2.5.2. *Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.*

Důkaz. Buď A matice ve schodovitém tvaru, která má m řádků, z nichž p je nenulových. Množina všech nenulových řádků je lineárně nezávislá (cvičení), takže $\operatorname{rank} A \geq p$. Jestliže $m = p$, hodnost větší být nemůže. Jestliže $m > p$, pak každá množina s více než p řádky obsahuje aspoň jeden nulový řádek, a je tedy lineárně závislá, takže i v tomto případě $\operatorname{rank} A = p$. □

Podle následujícího tvrzení je množina řádků lineárně nezávislá právě tehdy, když je lineárně nezávislá množina řádků vzniklá provedením řádkové nebo sloupkové elementární úpravy původní množiny řádků.

Tvrzení 2.5.3. *Buďte $A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ$ řádky. Nechť $B^1_\circ, B^2_\circ, \dots, B^m_\circ$ jsou řádky, které z řádků $A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ$ vzniknou provedením jedné řádkové nebo sloupkové elementární úpravy. Potom množina řádků $\{A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ\}$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když množina řádků $\{B^1_\circ, B^2_\circ, \dots, B^m_\circ\}$ je lineárně nezávislá.*

Důkaz. (1) Nechť došlo k přičtení c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku, kde $i \neq j$. Tedy, $B^i_\circ = A^i_\circ + cA^j_\circ$ a $B^k_\circ = A^k_\circ$ pro $k \neq i$.

Předpokládejme, že $\{A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ\}$ je lineárně nezávislá. Buďte $c_1, \dots, c_m \in P$ takové, že $c_1 B^1_\circ + \dots + c_m B^m_\circ = 0_\circ$. Pak

$$\begin{aligned} 0_\circ &= c_1 B^1_\circ + \dots + c_m B^m_\circ = \\ &= c_1 A^1_\circ + \dots + c_i(A^i_\circ + cA^j_\circ) + \dots + c_j A^j_\circ + \ldots + c_m A^m_\circ = \\ &= c_1 A^1_\circ + \dots + c_i A^i_\circ + \dots + (c_j + cc_i)A^j_\circ + \ldots + c_m A^m_\circ. \end{aligned}$$

Z lineární nezávislosti množiny $\{A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ\}$ vyplývá, že všechny koeficienty poslední lineární kombinace jsou nulové, tj. $c_1 = \dots = c_i = \dots = cc_i + c_j = \dots = c_m = 0$. Z toho dostaneme, že i $c_j = 0$, a množina $\{B^1_\circ, B^2_\circ, \dots, B^m_\circ\}$ je lineárně nezávislá.

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, neboť řádky $A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ$ vzniknou z řádků $B^1_\circ, B^2_\circ, \dots, B^m_\circ$ inverzní úpravou, která je stejného typu.

(2) Nechť došlo k přičtení c-násobku j-tého sloupku k i-tému sloupku, kde $i \neq j$. Pak pro každé $k \in \{1, \dots, m\}$ je $B^k_i = A^k_i + cA^k_j$ a $B^k_l = A^k_l$ pro $l \neq i$. Tedy $B^k_\circ = \begin{pmatrix} A^k_1 & \dots & A^k_i + cA^k_j & \dots & A^k_j & \dots & A^k_n \end{pmatrix}$.

Předpokládejme, že $\{A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ\}$ je lineárně nezávislá. Buďte $c_1, \dots, c_m \in P$ takové, že $c_1 B^1_\circ + \dots + c_m B^m_\circ = 0_\circ$. Takže

$$\begin{aligned} & c_1 B^1_\circ + \dots + c_m B^m_\circ = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_k c_k A^k_1 & \dots & \sum_k c_k(A^k_i + cA^k_j) & \dots & \sum_k c_k A^k_j & \dots & \sum_k c_k A^k_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_k c_k A^k_1 & \dots & \sum_k c_k A^k_i + c\sum_k c_k A^k_j & \dots & \sum_k c_k A^k_j & \dots & \sum_k c_k A^k_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a z toho dostaneme

$$\sum_k c_k A^k_1 = \dots = \sum_k c_k A^k_i = \dots = \sum_k c_k A^k_j = \dots = \sum_k c_k A^k_n = 0.$$

Pak

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \sum_k c_k A^k_1 & \sum_k c_k A^k_2 & \dots & \sum_k c_k A^k_n \end{pmatrix} = \sum_k c_k \begin{pmatrix} A^k_1 & A^k_2 & \dots & A^k_n \end{pmatrix} = \\ &= \sum_k c_k A^k_\circ = c_1 A^1_\circ + \dots + c_m A^m_\circ = 0_\circ \end{aligned}$$

a z lineární nezávislosti množiny $\{A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ\}$ dostaneme $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$. Množina $\{B^1_\circ, B^2_\circ, \dots, B^m_\circ\}$ je tedy lineárně nezávislá.

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, neboť řádky $A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ$ vzniknou z řádků $B^1_\circ, B^2_\circ, \dots, B^m_\circ$ inverzní úpravou, která je stejného typu.

Pro ostatní úpravy je důkaz obdobný a ponecháme ho jako cvičení. $\square$

Důsledek. *(1) Hodnost matice je rovna hodnosti matice z ní vzniklé provedením elementární úpravy.*

(2) Provedení konečně mnoha elementárních úprav nemění hodnost.

(3) Vynásobení konečně mnoha elementárními maticemi zleva nemění hodnost.

(4) Vynásobení konečně mnoha elementárními maticemi zprava nemění hodnost.

(5) Ekvivalentní matice mají stejnou hodnost.

(6) Hodnost matice je rovna počtu nenulových řádků ekvivalentní matice ve schodovitém tvaru.

(7) Hodnost matice je rovna počtu nenulových řádků (sloupků) ekvivalentní matice v Gaussově kanonickém tvaru.

(8) Maximální počet lineárně nezávislých sloupků matice je roven maximálnímu počtu jejích lineárně nezávislých řádků, tj. hodnosti matice.

(9) $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T$.

Příklad. Spočítejme hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Takže $\operatorname{rank} A = 3$. ■

Příklad. Spočítejme hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Takže $\operatorname{rank} A = 2$. ■

Definice 2.5.3. Čtvercová matice je *regulární*, jestliže její hodnost je rovna počtu jejích řádků (tedy množina všech jejích řádků je lineárně nezávislá). Čtvercová matice je *singulární*, jestliže není regulární.

Příklad. (1) Všechny jednotkové matice jsou regulární.

(2) Všechny elementární matice jsou regulární.

(3) Všechny čtvercové matice s aspoň jedním nulovým řádkem jsou singulární. ■

Tvrzení 2.5.4. *Matice je regulární právě tehdy, když je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.*

Důkaz. Cvičení. □

Důsledek. *(1) Matice je invertibilní právě tehdy, když je regulární.*

(2) Regulární matice je součinem konečně mnoha elementárních matic.

(3) Součin regulárních matic je regulární matice.

(4) Vynásobení regulární maticí zleva nemění hodnost.

(5) Vynásobení regulární maticí zprava nemění hodnost.

Tvrzení 2.5.5. *Buďte A, B čtvercové matice stejného typu. Obě matice A, B jsou regulární právě tehdy, když matice AB je regulární.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Tato implikace je součástí předchozího Důsledku.

„$\Leftarrow$“ Dokážeme, že je-li aspoň jedna z matic A, B singulární, pak AB je singulární. Nechť A je singulární. Ekvivalentní matice $S = Q_k \cdots Q_1 A$, kde $Q_1, \ldots, Q_k$ jsou elementární matice, ve schodovitém tvaru, má nulový řádek. Potom matice SB má také nulový řádek, je tedy singulární a řádkově ekvivalentní matice $AB = Q_1^{-1} \cdots Q_k^{-1} SB$, která má stejnou hodnost, je také singulární.

Pro B singulární je důkaz analogický a ponecháme ho jako cvičení. $\square$

Tvrzení 2.5.6. *Buďte A matice typu $m \times n$ a B matice typu $n \times p$. Potom* $\operatorname{rank} AB \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$.

Důkaz. Matici A převedeme pomocí řádkových elementárních úprav na schodovitý tvar $S_A = Q_k \cdots Q_1 A$ a matici B převedeme pomocí sloupkových elementárních úprav na tvar $S_B = BP_1 \cdots P_l$ takový, že S_B^T je ve schodovitém tvaru.

Potom $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} Q_1^{-1} \cdots Q_k^{-1} S_A S_B P_l^{-1} \cdots P_1^{-1} = \operatorname{rank} S_A S_B$, přičemž matice $S_A S_B$ má minimálně tolik nulových řádků, kolik jich má matice S_A, a minimálně tolik nulových sloupků, kolik jich má matice S_B. Tedy $\operatorname{rank} S_A S_B \leq \operatorname{rank} S_A = \operatorname{rank} A$ a $\operatorname{rank} S_A S_B \leq \operatorname{rank} S_B = \operatorname{rank} B$. $\square$

Cvičení. Co se dá říct o $\operatorname{rank}(A + B)$? $\triangleright$

3. Determinant

3.1. Permutace

Definice 3.1.1. Buď M konečná množina. *Permutace* na množině M je bijekce $M \to M$.

Buď σ permutace na množině M a $m \in M$. Obraz $\sigma(m)$ prvku m při permutaci σ se často značí σ_m.

Definice 3.1.2. *Transpozice* je permutace, při níž se vzájemně vymění dva prvky a ostatní se nezmění.

Tvrzení 3.1.1. *Každá permutace je složením konečně mnoha transpozic.*

Nechť $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Množinu všech permutací na množině I_n značíme S_n. Permutaci $\sigma \in S_n$ můžeme zapisovat jako uspořádanou n-tici obrazů prvků množiny I_n, tedy $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$.

Definice 3.1.3. Buď $\sigma \in S_n$. Nechť $i, j \in I_n$ jsou takové, že $i < j$ a $\sigma_i > \sigma_j$. Pak dvojice (σ_i, σ_j) tvoří *inverzi* permutace σ.

Počet inverzí permutace σ značíme $\operatorname{inv}\sigma$. Je zřejmé, že $\operatorname{inv}\sigma = \operatorname{inv}\sigma^{-1}$.

Definice 3.1.4. *Signum (znaménko)* permutace $\sigma \in S_n$ je $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{\operatorname{inv}\sigma}$. Permutace s $\operatorname{sgn}\sigma = 1$ je *sudá*, permutace s $\operatorname{sgn}\sigma = -1$ je *lichá*.

Jelikož $\operatorname{inv}\sigma = \operatorname{inv}\sigma^{-1}$, $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$.

Tvrzení 3.1.2. *Buďte $\rho, \sigma \in S_n$. Pak* $\operatorname{sgn}(\pi \circ \rho) = \operatorname{sgn}\pi \cdot \operatorname{sgn}\rho$.

Cvičení. Ukažte, že každá transpozice je lichá permutace. $\triangleright$

Více o permutacích lze najít například v [Marvan, 4. Permutace].