

2.4. Inverzní matice

Definice 2.4.1. Buď A čtvercová matice. Matice X je *inverzní* k matici A , je-li stejného typu a platí

$$AX = XA = E.$$

Inverzní matice k matici A se značí A^{-1} . Matice je *invertibilní*, existuje-li matice k ní inverzní.

Příklad. (1) Každá jednotková matice E je invertibilní a $E^{-1} = E$.

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ je invertibilní, protože } A \cdot A = E, \text{ a tedy } A^{-1} = A.$$

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ není invertibilní, protože pro libovolnou matici } X \text{ typu } 2 \times 2 \text{ } AX \text{ má druhý řádek nulový a není to tedy jednotková matice.}$$

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ není invertibilní, protože pro libovolnou matici } X \text{ typu } 2 \times 2 \text{ } XA \text{ má první sloupek nulový a není to tedy jednotková matice.}$$

(5) Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Předpokládejme, že X je inverzní k A . Pak $AX = E$, tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z toho dostaneme rovnosti

$$a - c = 1, \quad b - d = 0, \quad a - c = 0, \quad b - d = 1.$$

Ze třetí rovnosti máme $a = c$ a po dosazení do první rovnosti máme $0 = 1$, což je spor. Z toho vyplývá, že neexistuje matice X taková, že $AX = E$, a matice A tedy není invertibilní.

(6) Žádná nulová matice není invertibilní.

(7) Elementární matice jsou invertibilní a přímým výpočtem lze ověřit (cvičení), že

$$(E^{i,j}(c))^{-1} = E^{i,j}(-c), \quad (E^i(c))^{-1} = E^i(c^{-1}), \quad (E^{i,j})^{-1} = E^{i,j}. \quad \blacksquare$$

Tvrzení 2.4.1. Ke každé matici existuje nejvýše jedna inverzní matice.

Důkaz. Předpokládejme, že X', X'' jsou inverzní matice k matici A . Tedy $AX' = X'A = AX'' = X''A = E$. Potom $X' = EX' = X''AX' = X''E = X''$. \square

Tvrzení 2.4.2. Nechť A, A_1, \dots, A_n jsou invertibilní matice stejného typu. Potom

- (1) $A_1 \cdot \dots \cdot A_n$ je invertibilní a $(A_1 \cdot \dots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot \dots \cdot A_1^{-1}$;
- (2) A^{-1} je invertibilní a $(A^{-1})^{-1} = A$;
- (3) A^T je invertibilní a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Důkaz. (1) $(A_1 \cdots A_n) \cdot (A_n^{-1} \cdots A_1^{-1}) = E = (A_n^{-1} \cdots A_1^{-1}) \cdot (A_1 \cdots A_n)$ a podle definice inverzní matice tedy $(A_1 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdots A_1^{-1}$.

(2) $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ a podle definice inverzní matice tedy $(A^{-1})^{-1} = A$.

(3) $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, tedy $E = E^T = (A^{-1}A)^T = A^T(A^{-1})^T$ a $E = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$ a podle definice inverzní matice $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. \square

Tvrzení 2.4.3. *Nechť A, B jsou čtvercové matice takové, že $AB = E$. Pak $BA = E$, obě matice A, B jsou invertibilní a jsou vzájemně inverzní ($A = B^{-1}$ a $B = A^{-1}$).*

Důkaz. Matici A upravme řádkovými elementárními úpravami na Gaussův–Jordanův tvar G , tedy $G = Q_k \cdots Q_1 A$, kde Q_1, \dots, Q_k jsou elementární matice příslušné provedeným úpravám. Pak $A = Q_1^{-1} \cdots Q_k^{-1} G$ a $AB = Q_1^{-1} \cdots Q_k^{-1} GB = E$. Matice G nemá nulový řádek, protože jinak by matice GB také měla nulový řádek a takovou matici nelze pomocí řádkových elementárních úprav (v tomto případě reprezentovaných maticemi $Q_1^{-1}, \dots, Q_k^{-1}$) převést na jednotkovou matici (cvičení). Jelikož G je v Gaussově–Jordanově tvaru a nemá nulový řádek, $G = E$. Pak $A = Q_1^{-1} \cdots Q_k^{-1}$ je invertibilní matice jakožto součin invertibilních matic a existuje tedy A^{-1} .

Potom $BA = EBA = A^{-1}ABA = A^{-1}EA = A^{-1}A = E$. Jelikož $AB = BA = E$, jsou obě matice A, B invertibilní a jsou vzájemně inverzní. \square

Nyní zformulujeme důležité kritérium invertibility.

Tvrzení 2.4.4. *Matice je invertibilní právě tehdy, když je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.*

Důkaz. „ \Rightarrow “ Nechť A je invertibilní matice. Řádkovými elementárními úpravami ji převedme na Gaussův–Jordanův tvar G , tedy $G = Q_k \cdots Q_1 A$, kde Q_1, \dots, Q_k jsou elementární matice příslušné provedeným úpravám. Každá z matic Q_1, \dots, Q_k, A je invertibilní a jejich součin G je také invertibilní. Potom G , jakožto invertibilní matice nemá nulový řádek a $G = E$, jelikož G je v Gaussově–Jordanově tvaru. Matice A je tedy řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.

„ \Leftarrow “ Předpokládejme, že matice A je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí E , tedy $Q_k \cdots Q_1 A = E$, kde Q_1, \dots, Q_k jsou vhodné elementární matice. Označme si $Q = Q_k \cdots Q_2 Q_1$, tedy $QA = E$. Podle Tvrzení 2.4.3 je A invertibilní a $A^{-1} = Q$. \square

Předchozí tvrzení nám nabízí postup pro výpočet inverzní matice. Podle důkazu totiž $A^{-1} = Q = Q_k \cdots Q_2 Q_1 = Q_k \cdots Q_2 Q_1 E$, což je matice, která vznikne z jednotkové matice provedením řádkových elementárních úprav odpovídajících násobení elementárními maticemi Q_1, Q_2, \dots, Q_k . To jsou stejné úpravy (resp. matice), které převedly A na E .

Výpočet inverzní matice. K matici A typu $n \times n$ zprava připojíme jednotkovou matici stejného typu a vznikne matice typu $n \times 2n$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots & A_n^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^m & A_2^m & \dots & A_n^m & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right).$$

Řádkovými elementárními úpravami ji převedeme na matici, která v levé části má matici B v Gaussově–Jordanově tvaru. Mohou nastat dvě možnosti.

(1) $B = E$. Pak A je invertibilní a v pravé části matice vyjde A^{-1} .

(2) $B \neq E$ (B má nulový řádek). Pak A není invertibilní.

Příklad. Vypočítejme inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
(A|E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Takže A je invertibilní a

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{ověřte}). \quad \blacksquare$$

Příklad. Hledejme inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
(A|E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Matice A tedy není řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí a není invertibilní. \blacksquare

Cvičení. Pokud existují, spočítejte inverzní matice k maticím

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \triangleright$$

2.5. Hodnost matice

2.5.1. Lineární nezávislost

Stejně jako v případě lineární kombinace v Definicí 2.2.3 následující definice a tvrzení formulujeme pouze pro řádky matice, ale vše lze obdobně formulovat pro sloupky, uspořádané n -tice a matice.

Definice 2.5.1. Množina řádků $\{A_{\circ}^{i_1}, A_{\circ}^{i_2}, \dots, A_{\circ}^{i_k}\}$ je *lineárně nezávislá*, jestliže pro libovolné $c_1, c_2, \dots, c_k \in P$ z rovnosti

$$c_1 A_{\circ}^{i_1} + c_2 A_{\circ}^{i_2} + \dots + c_k A_{\circ}^{i_k} = 0_{\circ} \quad \text{vyplývá} \quad c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0,$$

tj. nulový řádek získáme jedinečně takovou lineární kombinací daných řádků, ve které jsou všechny koeficienty rovny nule.

Množina řádků $\{A_{\circ}^{i_1}, A_{\circ}^{i_2}, \dots, A_{\circ}^{i_k}\}$ je *lineárně závislá*, jestliže není lineárně nezávislá. Tedy, existují $c_1, c_2, \dots, c_k \in P$ taková, že aspoň jedno z nich je nenulové a přitom

$$c_1 A_{\circ}^{i_1} + c_2 A_{\circ}^{i_2} + \dots + c_k A_{\circ}^{i_k} = 0_{\circ}.$$

Tvrzení 2.5.1. *Množina řádků je lineárně závislá právě tehdy, když aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních.*

Důkaz. Předpokládejme, že množina řádků $\{A_{\circ}^{i_1}, A_{\circ}^{i_2}, \dots, A_{\circ}^{i_k}\}$ je lineárně závislá. Existují tedy koeficienty $c_1, c_2, \dots, c_k \in P$ takové, že aspoň jeden z nich je nenulový (například c_j) a $c_1 A_{\circ}^{i_1} + \dots + c_j A_{\circ}^{i_j} + \dots + c_k A_{\circ}^{i_k} = 0_{\circ}$. Potom

$$\begin{aligned} c_j A_{\circ}^{i_j} &= -c_1 A_{\circ}^{i_1} - \dots - c_{j-1} A_{\circ}^{i_{j-1}} - c_{j+1} A_{\circ}^{i_{j+1}} - \dots - c_k A_{\circ}^{i_k}, \\ A_{\circ}^{i_j} &= -\frac{c_1}{c_j} A_{\circ}^{i_1} - \dots - \frac{c_{j-1}}{c_j} A_{\circ}^{i_{j-1}} - \frac{c_{j+1}}{c_j} A_{\circ}^{i_{j+1}} - \dots - \frac{c_k}{c_j} A_{\circ}^{i_k} \end{aligned}$$

a řádek $A_{\circ}^{i_j}$ je tedy lineární kombinací ostatních řádků.

Předpokládejme, že například řádek $A_{\circ}^{i_j}$ je lineární kombinací ostatních řádků, tedy

$$A_{\circ}^{i_j} = c_1 A_{\circ}^{i_1} + \dots + c_{j-1} A_{\circ}^{i_{j-1}} + c_{j+1} A_{\circ}^{i_{j+1}} + \dots + c_k A_{\circ}^{i_k}.$$

Potom

$$c_1 A_{\circ}^{i_1} + \dots + c_{j-1} A_{\circ}^{i_{j-1}} - A_{\circ}^{i_j} + c_{j+1} A_{\circ}^{i_{j+1}} + \dots + c_k A_{\circ}^{i_k} = 0_{\circ}$$

a zároveň $c_j = -1$. Takže množina řádků $\{A_{\circ}^{i_1}, A_{\circ}^{i_2}, \dots, A_{\circ}^{i_k}\}$ je lineárně závislá. \square

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nechť

$$\begin{aligned} c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix} c_2 + c_3 & c_1 + 2c_2 & 2c_1 + 3c_2 + c_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Takže

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

a to je možné jedinečně v případě, že $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (vyřešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých c_1, c_2, c_3 a získáme jediné, nulové řešení).

Množina řádků matice A je tedy lineárně nezávislá. \blacksquare

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nechť

$$\begin{aligned} c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} c_2 + 2c_3 & c_1 + 2c_2 + c_3 & 2c_1 + 3c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soustava

$$\begin{aligned} c_2 + 2c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 &= 0 \end{aligned}$$

má kromě nulového i nenulová řešení (například $c_1 = 3$, $c_2 = -2$, $c_3 = 1$). Množina řádků matice A je tedy lineárně závislá. ■

Příklad. (1) Množina řádků jednotkové matice je lineárně nezávislá. Ověřte.

(2) Množina řádků, z nichž aspoň jeden je nulový, je lineárně závislá. Ověřte.

(3) Jednoprvková množina obsahující řádek A_{\circ}^i je lineárně nezávislá, jestliže $cA_{\circ}^i = 0$. plyne $c = 0$. Tedy, jednoprvková množina obsahující jeden řádek je lineárně nezávislá, jestliže ten řádek je nenulový, a je lineárně závislá, jestliže ten řádek je nulový.

(4) Množina obsahující jen řádky $A_{\circ}^{i_1}, A_{\circ}^{i_2}$ je lineárně závislá právě tehdy, když jeden z řádků je násobkem druhého z řádků (existuje $c \in P$ takové, že $A_{\circ}^{i_1} = cA_{\circ}^{i_2}$).

(5) Prázdna množina řádků je lineárně nezávislá. ■