2. přednáška, 27. 9. 2022

2.2.3. Transponování

Definice 2.2.5. *Transponovaná* matice k matici A typu $m\times n$ je matice A^T typu $n\times m$, kde $(A^\mathsf{T})^i_j = A^j_i$ pro všechna i,j.

Příklad.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$$ ■

Tvrzení 2.2.3. *Nechť A,B jsou matice nad polem P takové, že níže uvedené operace jsou definovány, a $c\in P$. Pak platí*

(1) $A=(A^\mathsf{T})^\mathsf{T}$,
(2) $(A+B)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T}+B^\mathsf{T}$,
(3) $(cA)^\mathsf{T} = cA^\mathsf{T}$,
(4) $(AB)^\mathsf{T} = B^\mathsf{T}A^\mathsf{T}$.

Důkaz. (1) Je-li A typu $m\times n$, potom A^T je typu $n\times m$ a $(A^\mathsf{T})^\mathsf{T}$ je typu $m\times n$. Navíc pro každé $i\in\{1,2,\dots,m\}$ a $j\in\{1,2,\dots,n\}$ platí

$$((A^\mathsf{T})^\mathsf{T})^i_j = (A^\mathsf{T})^j_i = A^i_j.$$

(4) Buďte A matice typu $m\times n$ a B matice typu $n\times p$. Pak A^T je typu $n\times m$, B^T je typu $p\times n$, AB je typu $m\times p$ a tedy $(AB)^\mathsf{T}$ i $B^\mathsf{T}A^\mathsf{T}$ jsou typu $p\times m$. Pro každé $i\in\{1,2,\dots,p\}$ a $j\in\{1,2,\dots,m\}$ platí

$$((AB)^\mathsf{T})^i_j = (AB)^j_i = \sum_{k=1}^n A^j_k B^k_i = \sum_{k=1}^n B^k_i A^j_k = \sum_{k=1}^n (B^\mathsf{T})^i_k (A^\mathsf{T})^k_j = \\ = (B^\mathsf{T}A^\mathsf{T})^i_j.$$

Ostatní body jsou ponechány jako cvičení. □

Cvičení. Ukažte, že pro libovolné $k\in\mathbb{N}$ a libovolné matice $A_1,\dots,A_k$ vhodných typů platí $(A_1\cdots A_k)^\mathsf{T} = A_k^\mathsf{T}\cdots A_1^\mathsf{T}$. ▷

2.3. Elementární úpravy a speciální tvary matic

2.3.1. Elementární úpravy

Definice 2.3.1. Mějme matici nad polem P. *Řádkové elementární úpravy* matice jsou

(1) přičtení c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku, kde $c\in P$ a $i\neq j$,
(2) vynásobení i-tého řádku nenulovým prvkem $c\in P$,
(3) vzájemná výměna i-tého řádku a j-tého řádku.

Sloupkové elementární úpravy matice definujeme analogicky.

Cvičení. Proveďte vzájemnou výměnu dvou řádků pomocí konečně mnoha úprav typů (1) a (2). ▷

Mějme matici A. Přičtením c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku změníme i-tý řádek na $\begin{pmatrix}A^i_1+cA^j_1 & A^i_2+cA^j_2 & \dots & A^i_n+cA^j_n\end{pmatrix}$ a ostatní řádky zůstanou beze změny.

Po vynásobení i-tého řádku prvkem $c\in P$ i-tý řádek bude $\begin{pmatrix}cA^i_1 & cA^i_2 & \dots & cA^i_n\end{pmatrix}$ a ostatní řádky zůstanou beze změny.

Po vzájemné výměně i-tého řádku a j-tého řádku i-tý řádek bude $\begin{pmatrix}A^j_1 & A^j_2 & \dots & A^j_n\end{pmatrix}$, j-tý řádek bude $\begin{pmatrix}A^i_1 & A^i_2 & \dots & A^i_n\end{pmatrix}$ a ostatní řádky zůstanou beze změny.

Sloupkové úpravy fungují analogicky pro sloupky.

Příklad. (1) Přičtením 3-násobku prvního řádku k druhému řádku upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{na matici} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix}.$$

(2) Vzájemnou výměnou prvního sloupku a třetího sloupku upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{na matici} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix}.$$ ■

Ke všem elementárním úpravám existují úpravy inverzní, které jsou také elementární a upravenou matici převedou zpět na původní matici. Inverzní úpravy k řádkovým úpravám jsou

(1) přičtení $-c$-násobku j-tého řádku k i-tému řádku,
(2) vynásobení i-tého řádku prvkem c^{-1},
(3) vzájemná výměna i-tého řádku a j-tého řádku.

Inverzní úpravy ke sloupkovým úpravám jsou obdobné.

Příklad. (1) Přičtením -3-násobku prvního řádku k druhému řádku upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{na matici} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(2) Vzájemnou výměnou prvního sloupku a třetího sloupku upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{na matici} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix}.$$ ■

Definice 2.3.2. Matice A, B jsou *ekvivalentní*, jestliže B může vzniknout z A konečnou posloupností elementárních úprav. Je-li možné toho dosáhnout pomocí pouze řádkových, resp. sloupkových úprav, matice jsou *řádkově*, resp. *sloupkově ekvivalentní.* V každém případě značíme $A \sim B$.

Příklad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$ ■

Tvrzení 2.3.1. *Ekvivalence matic je relace ekvivalence na množině všech matic stejného typu nad stejným polem.*

Důkaz. Cvičení. □

2.3.2. Schodovitý, Gaussův–Jordanův a Gaussův kanonický tvary matic

Připomeňme si definice z podkapitoly 2.1.

Definice 2.3.3. Matice je ve *schodovitém tvaru*, jestliže každý nenulový řádek, kromě prvního řádku, začíná zleva více nulami než řádek předchozí.

To znamená, že všechny řádky pod nulovým řádkem jsou nulové.

Definice 2.3.4. Matice je v *Gaussově–Jordanově tvaru*, jestliže

(i) je ve schodovitém tvaru,
(ii) v každém nenulovém řádku první (zleva) nenulový prvek je 1,
(iii) v každém sloupku, ve kterém je první nenulový prvek nějakého řádku, ostatní prvky jsou 0.

Definice 2.3.5. *Gaussův kanonický tvar* matice je

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde E je jednotková matice a 0 označuje nulové matice příslušných typů.

Příklad. (1) Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice A není ve schodovitém tvaru. Matice B je ve schodovitém tvaru, ale není v Gaussově–Jordanově tvaru. Matice C je v Gaussově–Jordanově tvaru.

(2) Každá nulová matice je v Gaussově–Jordanově tvaru. ■

Definice 2.3.6. Mějme nenulovou matici. *Gaussova eliminace* je úprava matice podle následujícího algoritmu.

Buď $i = 1$.

(1) Uvažujme první nenulový sloupek, který má nějaký nenulový prvek v i-tém nebo nižším řádku.
(2) Není-li v i-tém řádku uvažovaného sloupku nenulový prvek, vyměníme i-tý řádek s vhodným nižším řádkem.
(3) V uvažovaném sloupku vynulujeme prvky v řádcích pod i-tým řádkem přičtením vhodných násobků i-tého řádku.
(4) Vezměme i o 1 větší ($i := i + 1$). Existuje-li nenulový sloupek, který má nějaký nenulový prvek v i-tém nebo nižším řádku, vraťme se do bodu (1). Jestliže takový sloupek neexistuje, algoritmus končí.

Tvrzení 2.3.2. *Každá matice je řádkově ekvivalentní matici ve schodovitém tvaru.*

Důkaz. Nulová matice je ve schodovitém tvaru. Libovolnou nenulovou matici upravíme pomocí Gaussovy eliminace. Všechny provedené úpravy jsou řádkové elementární úpravy a z postupu při Gaussově eliminaci vyplývá, že každý nenulový řádek, kromě prvního řádku, začíná více nulami než řádek předchozí. □

Definice 2.3.7. Mějme nenulovou matici. *Gaussova–Jordanova eliminace* je úprava matice podle následujícího algoritmu.

Buď $i = 1$.

(1) Uvažujme první nenulový sloupek, který má nějaký nenulový prvek v i-tém nebo nižším řádku.
(2) Není-li v i-tém řádku uvažovaného sloupku nenulový prvek, vyměníme i-tý řádek s vhodným nižším řádkem.
(3) i-tý řádek vydělíme jeho prvním nenulovým prvkem.
(4) V uvažovaném sloupku vynulujeme prvky mimo i-tý řádek přičtením vhodných násobků i-tého řádku.
(5) Vezměme i o 1 větší ($i := i + 1$). Existuje-li nenulový sloupek, který má nějaký nenulový prvek v i-tém nebo nižším řádku, vraťme se do bodu (1). Jestliže takový sloupek neexistuje, algoritmus končí.

Tvrzení 2.3.3. *Každá matice je řádkově ekvivalentní matici v Gaussově–Jordanově tvaru.*

Důkaz. Nulová matice je v Gaussově–Jordanově tvaru. Libovolnou nenulovou matici upravíme pomocí Gaussovy–Jordanovy eliminace. Všechny provedené úpravy jsou řádkové elementární úpravy a z postupu při Gaussově–Jordanově eliminaci vyplývá, že výsledná matice je v Gaussově–Jordanově tvaru. □

Tvrzení 2.3.4. *Každá nenulová matice je ekvivalentní matici v Gaussově kanonickém tvaru.*

Důkaz. S použitím řádkových i sloupkových elementárních úprav a vhodnou úpravou Gaussovy–Jordanovy eliminace získáme algoritmus, který převádí libovolnou nenulovou matici na ekvivalentní matici v Gaussově kanonickém tvaru. Podrobnosti ponecháme jako cvičení. □

2.3.3. Elementární matice

Definice 2.3.8. *Elementární matice* jsou:

(1) pro $i \neq j$

$$E^{i,j}(c) = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & c & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ i\text{-tý řádek} \\ \\ j\text{-tý řádek} \\ \\ \\ \end{array}$$

(2) pro $c \neq 0$

$$E^{i}(c) = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & c & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ i\text{-tý řádek} \\ \\ \\ \end{array}$$

(3) pro $i \neq j$

$$E^{i,j} = \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ i\text{-tý řádek} \\ \\ j\text{-tý řádek} \\ \\ \\ \end{array}$$

Každá elementární matice vznikne z jednotkové matice provedením vhodné řádkové nebo sloupkové elementární úpravy.

Matice $E^{i,j}(c)$ vznikne z jednotkové matice E přičtením c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku a od jednotkové matice se liší jen tím, že $(E^{i,j}(c))^i_j = c$, zatímco $E^i_j = 0$.

Matice $E^i(c)$ vznikne z jednotkové matice E vynásobením i-tého řádku prvkem c a od jednotkové matice se liší jen tím, že $(E^i(c))^i_i = c$, zatímco $E^i_i = 1$.

Matice $E^{i,j}$ vznikne z jednotkové matice E výměnou i-tého řádku a j-tého řádku a od jednotkové matice liší jen tím, že i-tý a j-tý řádky jsou vzájemně vyměněny.

Lemma 2.3.5. *Buďte A, B matice.*

(1) *Matice B může vzniknout z matice A pomocí jedné řádkové elementární úpravy právě tehdy, když existuje elementární matice Q taková, že $B = QA$.*

(2) Matice B může vzniknout z matice A pomocí jedné sloupkové elementární úpravy právě tehdy, když existuje elementární matice Q taková, že $B = AQ$.

Důkaz. Přímým výpočtem lze ověřit, že přičtení c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku je totéž co vynásobení maticí $E^{i,j}(c)$ zleva, vynásobení i-tého řádku prvkem $c \in P$ je totéž co vynásobení maticí $E^i(c)$ zleva a výměna i-tého řádku a j-tého řádku je totéž co vynásobení maticí $E^{i,j}$ zleva. Viz také komentář za Definicí 2.2.4 součinu matic. Analogicky pro sloupkové úpravy a násobení zprava. Cvičení. □

Příklad. Buďte

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ B_1 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \ B_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$B_1 = E^{1,3}(2) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot A^1_\circ + 2 \cdot A^3_\circ \\ A^2_\circ \\ A^3_\circ \end{pmatrix}$$

$$B_2 = E^3(2) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1_\circ \\ A^2_\circ \\ 2 \cdot A^3_\circ \end{pmatrix}$$

$$B_3 = E^{1,3} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^3_\circ \\ A^2_\circ \\ A^1_\circ \end{pmatrix}.$$ ■

Lemma 2.3.6. *Transponované matice k elementárním maticím jsou elementární matice.*

Důkaz. Cvičení. □