

9. HOMOMORFISMY

9.1. Homomorfismy a izomorfismy grup

9.1.1. Homomorfismy grup

Definice 9.1.1. Buďte $(X, *, e_X, {}^{-1})$, $(Y, \diamond, e_Y, {}^{-1})$ grupy. Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ je *homomorfismus grup*, jestliže

- (i) pro každé $x_1, x_2 \in X$ platí $f(x_1 * x_2) = f(x_1) \diamond f(x_2)$,
- (ii) $f(e_X) = e_Y$,
- (iii) pro každé $x \in X$ platí $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

Značí se $f: (X, *, e_X, {}^{-1}) \rightarrow (Y, \diamond, e_Y, {}^{-1})$.

Příklad. (1) $f_2: (\mathbb{Z}, +, 0, -) \rightarrow (\mathbb{Z}, +, 0, -)$, $n \mapsto 2n$, je homomorfismus grup.

(2) Buď X grupa, \tilde{X} faktorová grupa. Potom zobrazení $X \rightarrow \tilde{X}$, $x \mapsto [x]$ (faktorová projekce) je homomorfismus grup.

(3) Buďte $X = \{0, 1, 2, 3\}$ a $Y = \{0, 1\}$ s binárními operacemi $+$ takovými, že

$$\begin{array}{c|cccc} + & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{array} \quad \text{a} \quad \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Potom množiny X a Y s těmito operacemi jsou grupy. Zobrazení $X \rightarrow Y$, $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 0$, $3 \mapsto 1$, je homomorfismus těchto grup. ■

Tvrzení 9.1.1. Buďte $(X, *, e_X, {}^{-1})$, $(Y, \diamond, e_Y, {}^{-1})$ grupy. Buď $f: X \rightarrow Y$ zobrazení takové, že pro každé $x_1, x_2 \in X$ platí $f(x_1 * x_2) = f(x_1) \diamond f(x_2)$. Pak f je homomorfismus grup $(X, *, e_X, {}^{-1}) \rightarrow (Y, \diamond, e_Y, {}^{-1})$.

Důkaz. Podmínka (i) z definice homomorfismu grup je podle předpokladu splněna.

Ukažme, že $f(e_X) = e_Y$.

$$\begin{aligned} f(e_X) &= f(e_X) \diamond e_Y = \\ &= f(e_X) \diamond f(e_X) \diamond (f(e_X))^{-1} = \\ &= f(e_X * e_X) \diamond (f(e_X))^{-1} = \\ &= f(e_X) \diamond (f(e_X))^{-1} = \\ &= e_Y. \end{aligned}$$

Ukažme, že $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$ pro každé $x \in X$.

$$\begin{aligned} f(x^{-1}) \diamond f(x) &= f(x^{-1} * x) = f(e_X) = e_Y, \\ f(x) \diamond f(x^{-1}) &= f(x * x^{-1}) = f(e_X) = e_Y. \end{aligned}$$

Takže $f(x^{-1})$ je inverze k $f(x)$. □

Cvičení. Buď $f: X \rightarrow Y$ homomorfismus grup. Označme

$$\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

Pak $\text{Im } f$ je podgrupa v Y . ▷

Tvrzení 9.1.2. *Buďte $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$ homomorfismy grup. Pak jejich složení $g \circ f: X \rightarrow Z$ je homomorfismus grup.*

Důkaz. Buďte $(X, *, e_X, {}^{-1}), (Y, \diamond, e_Y, {}^{-1}), (Z, \cdot, e_Z, {}^{-1})$ grupy. Pro každé $x_1, x_2 \in X$ platí

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_1 * x_2) &= g(f(x_1 * x_2)) = \\ &= g(f(x_1) \diamond f(x_2)) = \\ &= g(f(x_1)) \cdot g(f(x_2)) = \\ &= (g \circ f)(x_1) \cdot (g \circ f)(x_2). \end{aligned}$$

Zbytek vyplývá z předchozího tvrzení. □

9.1.2. Izomorfismy grup

Definice 9.1.2. *Izomorfismus grup je homomorfismus grup, který je bijektivní.*

Tvrzení 9.1.3. *Buď $f: X \rightarrow Y$ izomorfismus grup. Pak $f^{-1}: Y \rightarrow X$ je izomorfismus grup.*

Důkaz. Buďte $(X, *, e_X, {}^{-1}), (Y, \diamond, e_Y, {}^{-1})$ grupy. Inverzní zobrazení je bijektivní. Pro libovolné $y_1, y_2 \in Y$ označme $x_1 = f^{-1}(y_1)$ a $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Takže $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Potom

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_1 \diamond y_2) &= f^{-1}(f(x_1) \diamond f(x_2)) = f^{-1}(f(x_1 * x_2)) = x_1 * x_2 = \\ &= f^{-1}(y_1) * f^{-1}(y_2). \end{aligned}$$

Zbytek vyplývá z Tvrzení 9.1.1. □

Příklad. (1) Každá identita je izomorfismus.

(2) Označme \mathbb{R}_+ množinu všech kladných reálných čísel. Pak $(\mathbb{R}_+, \cdot, 1, {}^{-1})$ je grupa (cvičení). Zobrazení $\exp: (\mathbb{R}, +, 0, -) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot, 1, {}^{-1}), x \mapsto e^x$ je homomorfismus grup, protože pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí $\exp(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = (\exp x) \cdot (\exp y)$. Tento homomorfismus je bijektivní, tedy i izomorfismus.

Inverzní izomorfismus je logaritmus

$$\ln: (\mathbb{R}_+, \cdot, 1, {}^{-1}) \rightarrow (\mathbb{R}, +, 0, -). \quad \blacksquare$$

Definice 9.1.3. Dvě grupy X, Y jsou *izomorfní*, jestliže existuje izomorfismus $X \rightarrow Y$. Zapisujeme $X \cong Y$.

Tvrzení 9.1.4. *Pro libovolné grupy X, Y, Z platí*

- (i) $X \cong X$ (reflexivita),
- (ii) jestliže $X \cong Y$, pak $Y \cong X$ (symetrie),
- (iii) jestliže $X \cong Y$ a $Y \cong Z$, pak $X \cong Z$ (tranzitivita).

Důkaz. Cvičení. □

Příklad. $(\mathbb{R}, +, 0, -) \cong (\mathbb{R}_+, \cdot, 1, {}^{-1})$. Pro libovolné $a \in \mathbb{R}_+, a \neq 1$, zobrazení $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto a^x$ je izomorfismus $(\mathbb{R}, +, 0, -) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot, 1, {}^{-1})$. Ověřte. ■

Cvičení. Buď $h: X \rightarrow Y$ homomorfismus grup.

- (1) Ukažte, že relace \sim zadaná předpisem

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow h(x_1) = h(x_2)$$

je kongruence na grupě X .

- (2) Ukažte, že faktorová grupa \tilde{X} podle kongruence \sim je izomorfní podgrupě $\text{Im } h$.

Návod: $\tilde{X} \rightarrow \text{Im } h, [x] \mapsto h(x)$. ▷

9.2. Homomorfismy a izomorfismy polí

Definice 9.2.1. Buďte P, Q pole. Zobrazení $f: P \rightarrow Q$ je *homomorfismus polí*, jestliže

- (i) pro každé $p_1, p_2 \in P$ platí $f(p_1 + p_2) = f(p_1) + f(p_2)$,
- (ii) $f(0) = 0$,
- (iii) pro každé $p \in P$ platí $f(-p) = -f(p)$,
- (iv) pro každé $p_1, p_2 \in P$ platí $f(p_1 \cdot p_2) = f(p_1) \cdot f(p_2)$,
- (v) $f(1) = 1$,
- (vi) pro každé $p \in P, p \neq 0$, platí $f(p^{-1}) = (f(p))^{-1}$.

Definice 9.2.2. Je-li homomorfismus polí navíc bijektivní, je to *izomorfismus polí*. Pole, mezi nimiž existuje izomorfismus, jsou *izomorfní*.

Příklad. Dvoupřvkové pole $\{0, 1\}$ je izomorfní s polem \mathbb{Z}_2 . Izomorfismem je zobrazení $0 \mapsto [0]_2, 1 \mapsto [1]_2$. ■

9.3. Izotonní zobrazení, homomorfismy a izomorfismy svazů

9.3.1. Izotonní zobrazení a izomorfismy uspořádaných množin

Definice 9.3.1. Buďte $(X, \leq), (Y, \leq)$ uspořádané množiny. Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ je *izotonní*, jestliže platí implikace

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Je-li zobrazení f bijektivní a f i f^{-1} jsou izotonní, pak f je *izomorfismus uspořádaných množin* a uspořádané množiny $(X, \leq), (Y, \leq)$ jsou *izomorfní*.

Příklad. Identické zobrazení $\text{id}: (\mathbb{N}, |) \rightarrow (\mathbb{N}, \leq)$ je izotonní. Skutečně, jestliže $a | b$, pak $b = na$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, ale $n \geq 1$, a proto $b = na \geq a$.

Inverzní zobrazení $\text{id}: (\mathbb{N}, \leq) \rightarrow (\mathbb{N}, |)$ není izotonní, protože neplatí implikace $x \leq y \Rightarrow x | y$ (například $2 \leq 3$, ale $2 \nmid 3$). ■

Příklad. Buďte $X = Y = \{0, 1\}$ s uspořádáními a zobrazením f podle obrázku:

$$\begin{array}{ccc} X & \begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ & f & | \\ 0 & \xrightarrow{\quad} & 0 \end{array} & Y \end{array}$$

Tedy $f: X \rightarrow Y$ je identické zobrazení. Pak f je izotonní bijekce, jejíž inverze f^{-1} není izotonní. ■

Cvičení. Složení izotonních zobrazení je izotonní zobrazení. ▷

9.3.2. Homomorfismy a izomorfismy svazů

Buďte $(X, \wedge, \vee), (Y, \wedge, \vee)$ svazy. Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ je *homomorfismus svazů*, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in X$

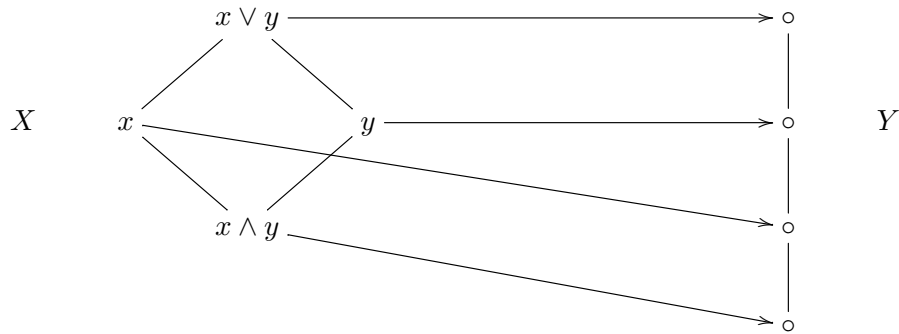
$$\begin{aligned} f(x_1 \wedge x_2) &= f(x_1) \wedge f(x_2) \\ f(x_1 \vee x_2) &= f(x_1) \vee f(x_2). \end{aligned}$$

Tvrzení 9.3.1. Každý homomorfismus svazů je izotonní zobrazení.

Důkaz. Buďte $(X, \wedge, \vee), (Y, \wedge, \vee)$ svazy, $f: X \rightarrow Y$ homomorfismus a $x_1, x_2 \in X$ takové, že $x_1 \leq x_2$, tedy $x_1 \wedge x_2 = x_1$. Potom $f(x_1) \wedge f(x_2) = f(x_1 \wedge x_2) = f(x_1)$, tedy $f(x_1) \leq f(x_2)$. □

Izotonní zobrazení svazů však nemusí být homomorfismus svazů:

Příklad. Buď f zobrazení podle obrázku:



Pak f je izotonní zobrazení svazů, ale není homomorfismus svazů, protože

$$f(x) \vee f(y) = f(y) \neq f(x \vee y).$$

■

Definice 9.3.2. *Izomorfismus svazů* je homomorfismus svazů, který je bijektivní.

Cvičení. Buď f zobrazení svazů. Dokažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:

- (1) f je izomorfismus uspořádaných množin;
- (2) f je izomorfismus svazů.

▷