11. přednáška, 6. 12. 2022

# 8. Uspořádání a svazy

## 8.1. Uspořádané množiny

**Definice 8.1.1.** Relace $\rho$ na množině $X$ je *uspořádání*, jestliže je

(1) reflexivní, tj. $x \,\rho\, x$ pro každé $x \in X$,
(2) antisymetrická, tj. $x \,\rho\, y$, $y \,\rho\, x$ implikuje $x = y$,
(3) tranzitivní, tj. $x \,\rho\, y$, $y \,\rho\, z$ implikuje $x \,\rho\, z$.

Potom dvojice $(X, \rho)$ je *uspořádaná množina*.

**Příklad.** (1) Pro libovolnou množinu $X$ relace $=$ je uspořádání.

(2) $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ $(\mathbb{R}, \leq)$, kde $\leq$ je obvyklé uspořádání podle velikosti, jsou uspořádané množiny.

(3) Buďte $X$ množina a $\mathcal{P}(X)$ množina všech podmnožin množiny $X$. Inkluze $\subseteq$ je uspořádání na $\mathcal{P}(X)$.

(4) Relace $\mid$ (dělí) na množině $\mathbb{N}$ (tj. $x \mid y$ právě tehdy, když existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x \cdot n = y$) je uspořádání, nazývá se *relace dělitelnosti*. Je zřejmé, že tato relace je reflexivní a tranzitivní.

Ukážeme, že $\mid$ je i antisymetrická relace. Předpokládejme, že $x \mid y$ a $y \mid x$, tedy existují $m, n \in \mathbb{N}$ taková, že $xm = y$ a $yn = x$. Potom $xmn = x$ a jelikož $x \neq 0$, $mn = 1$. V přirozených číslech to lze jedině tak, že $m = 1$ a $n = 1$. Tedy $x = x \cdot 1 = y$.

Upozorňeme, že obdobně definovaná relace dělitelnosti na $\mathbb{Z}$ není antisymetrická, protože $1 \neq -1$, přestože $1 \mid -1$ a $-1 \mid 1$ (rovnice $mn = 1$ má v celých číslech další řešení $m = -1$ a $n = -1$). ∎

Buď $\rho$ uspořádání na množině $X$. Inverzní (opačná) relace $\rho^{-1}$ (tj. relace definovaná předpisem „$x \,\rho^{-1}\, y$ právě tehdy, když $y \,\rho\, x$“) je také uspořádání. Nazývá se *duální uspořádání*. Máme-li uspořádání $\leq$, potom duální uspořádání $\leq^{-1}$ se označuje symbolem $\geq$. Podobně je to se symboly $\subseteq$ atp.

**Definice 8.1.2.** Buď $(X, \leq)$ uspořádaná množina, $Y \subseteq X$. Relace $\leq_Y$ na množině $Y$ zadaná předpisem $x \leq_Y y \Leftrightarrow x \leq y$ je uspořádání na množině $Y$. Nazývá se *indukované uspořádání* a značí se rovněž $\leq$.

**Definice 8.1.3.** Prvky $x, y$ uspořádané množiny jsou *srovnatelné*, platí-li $x \leq y$ nebo $y \leq x$. Uspořádaná množina je *řetězec*, jsou-li každé dva její prvky srovnatelné.

**Příklad.** $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ $(\mathbb{N}, \leq)$ jsou řetězce. ∎

Buď $\leq$ uspořádání na $X$. Označme $x < y$, jestliže $x \leq y$ a zároveň $x \neq y$. Dále zaveďme označení $x \lessdot y$, jestliže $x < y$ a neexistuje $z \in X$ takové, že $x < z$, $z < y$. Je-li $x \lessdot y$, pak říkáme, že $x$ je *bezprostředním předchůdcem* $y$, nebo $y$ *pokrývá* $x$.

**Příklad.** (1) V množině $\mathbb{N}$ s přirozeným uspořádáním podle velikosti platí $1 < 2$ a $1 \lessdot 2$, $1 < 3$, ale neplatí $1 \lessdot 3$.

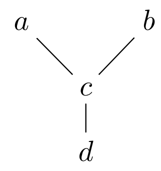
(2) V množině $\mathbb{N}$ s relací dělitelnosti 6 pokrývá 3.

(3) V množině $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel s přirozeným uspořádáním podle velikosti neplatí $x \lessdot y$ pro žádnou dvojici $x, y \in \mathbb{Q}$. Pro libovolné $x, y \in \mathbb{Q}$ takové, že $x < y$, platí $z = \frac{1}{2}(x + y) \in \mathbb{Q}$ a $x < z$, $z < y$. ∎

Konečnou uspořádanou množinu $(X, \leq)$ můžeme znázornit diagramem. Prvky množiny $X$ znázorníme jako body v rovině. Prvky $x, y$ splňující $x \lhd y$ vyznačíme tak, že $x$ leží níže než $y$ a spojíme je úsečkou.

Z diagramu pak můžeme určit uspořádání množiny $X$: $x \leq y$ právě tehdy, když $x$ leží níže než $y$ a existuje zdola nahoru směřující konečná posloupnost na sebe navazujících úseček z bodu $x$ do bodu $y$.

**Příklad.** V uspořádané množině $Y = \{a, b, c, d\}$ s diagramem vpravo platí:




- $d \lhd c$, $c \lhd a$, $c \lhd b$,
- $d < a$, ale nikoliv $d \lhd a$,
- prvky $a, b$ nejsou srovnatelné. ■

**Definice 8.1.4.** Buď $(X, \leq)$ uspořádaná množina. Prvek $x \in X$ je

- *nejmenší*, je-li $x \leq y$ pro každé $y \in X$;
- *největší*, je-li $x \geq y$ pro každé $y \in X$;
- *minimální*, neexistuje-li $y \in X$ takové, že $y < x$;
- *maximální*, neexistuje-li $y \in X$ takové, že $x < y$.

**Příklad.** V uspořádané množině $Y$ z předchozího příkladu platí:

- $d$ je nejmenší prvek a zároveň jediný minimální prvek,
- $a, b$ jsou maximální prvky, ale největší prvek neexistuje. ■

**Definice 8.1.5.** Buď $(X, \leq)$ uspořádaná množina, $Y \subseteq X$. Prvek $x \in X$ je

- *dolní závora* množiny $Y$, je-li $x \leq y$ pro každé $y \in Y$,
- *horní závora* množiny $Y$, je-li $y \leq x$ pro každé $y \in Y$,
- *infimum* množiny $Y$, je-li $x$ největší prvek množiny všech dolních závor množiny $Y$; píšeme $x = \inf Y$,
- *supremum* množiny $Y$, je-li $x$ nejmenší prvek množiny všech horních závor množiny $Y$; píšeme $x = \sup Y$.

**Příklad.** V uspořádané množině $Y$ z předchozího příkladu platí:

- podmnožina $\{a, b\}$ má dolní závory $c, d$, z nich největší je $c$, a proto $\inf\{a, b\} = c$,
- podmnožina $a, b$ nemá žádnou horní závoru, a proto $\sup\{a, b\}$ neexistuje (množina horních závor je prázdná, a proto nemá největší prvek). ■

**Cvičení.** (1) Každá podmnožina má nejvýše jedno supremum a nejvýše jedno infimum.

(2) Jestliže $x \leq y$, pak $\inf\{x, y\} = x$ a $\sup\{x, y\} = y$.

(3) Jestliže $\inf\{x, y\} = x$, pak $x \leq y$.

(4) Jestliže $\sup\{x, y\} = y$, pak $x \leq y$. ▷

**Cvičení.** Buď $X$ uspořádaná množina. Supremum prázdné množiny je nejmenší prvek množiny $X$ (pokud existuje) a infimum prázdné množiny je největší prvek množiny $X$ (pokud existuje). ▷

## 8.2. Svazy

**Definice 8.2.1.** Buď $X$ uspořádaná množina. Nechť pro každé $x, y \in X$ existují infimum $\inf\{x, y\}$ a supremum $\sup\{x, y\}$. Pak $X$ je *svazově uspořádaná množina.*

**Příklad.** (1) Pro libovolnou množinu $X$ je $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ svazově uspořádaná množina, přičemž pro libovolné $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$ $\inf\{Y, Z\} = Y \cap Z$ a $\sup\{Y, Z\} = Y \cup Z$.

(2) $(\mathbb{N}, |)$ je svazově uspořádaná množina, přičemž $\inf\{x,y\}$ je největší společný dělitel čísel $x, y$, $\sup\{x,y\}$ je nejmenší společný násobek čísel $x, y$.

(3) Každý řetězec je svazově uspořádaná množina, přičemž $\inf\{x,y\} = \min\{x,y\}$ je menší z prvků $x, y$, $\sup\{x,y\} = \max\{x,y\}$ je větší z prvků $x, y$. ■

Jelikož ve svazově uspořádané množině $X$ pro každé $x, y$ existují $\inf\{x,y\}$ a $\sup\{x,y\}$ a jsou jednoznačně určena, můžeme na $X$ definovat binární operace $\wedge$ a $\vee$:

$$x \wedge y := \inf\{x,y\}, \quad x \vee y := \sup\{x,y\}.$$

**Tvrzení 8.2.1.** *Buď $X$ svazově uspořádaná množina. Pro libovolná $x, y, z \in X$ platí*

$$\begin{array}{ll} x \wedge x = x, & x \vee x = x, \\ x \wedge y = y \wedge x, & x \vee y = y \vee x, \\ x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, & x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \\ x \wedge (y \vee x) = x, & x \vee (y \wedge x) = x. \end{array} \tag{6}$$

*Důkaz.* Cvičení.
Asociativita $\vee$: Návod: Ukažte, že $x \vee (y \vee z) = \sup\{x,y,z\} = (x \vee y) \vee z$. □

**Cvičení.** Dokažte, že $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n = \sup\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. (Vlevo nezáleží na uzávorkování). ▷

**Definice 8.2.2.** Množina $X$ (bez jakéhokoliv uvažovaného uspořádání) se dvěma binárními operacemi $\wedge$ a $\vee$ s vlastnostmi (6) se nazývá *svaz*. Binární operace $\wedge$ se nazývá *průsek*, binární operace $\vee$ se nazývá *spojení*.

Podle předcházejícího tvrzení tedy každá svazově uspořádaná množina je svaz. Podle následujícího cvičení platí však i obráceně, že každý svaz je svazově uspořádaná množina.

**Cvičení.** (1) Buď $(X, \wedge, \vee)$ svaz.
- (a) Položme $x \leq_\wedge y$ právě tehdy, když $x \wedge y = x$. Pak $\leq_\wedge$ je uspořádání na $X$.
- (b) Položme $x \leq_\vee y$ právě tehdy, když $x \vee y = y$. Pak $\leq_\vee$ je uspořádání na $X$.
- (c) Uspořádání $\leq_\wedge$ je shodné s uspořádáním $\leq_\vee$ a je svazové, přičemž

$$\inf\{x,y\} = x \wedge y, \quad \sup\{x,y\} = x \vee y.$$

(2) Buď $(X, \wedge, \vee)$ svaz. Ukažte, že $(X, \vee, \wedge)$ je také svaz (identity (6) definující svaz jsou symetrické vzhledem k vzájemné záměně $\wedge$ a $\vee$). Nazývá se *duální svaz* a značí se $X^*$. Ověřte, že duální svaz má duální uspořádání. ▷

Budeme používat termín svaz i pro svazově uspořádané množiny. Svazy budeme chápat i jako algebraické struktury i jako uspořádané množiny současně. Uspořádání totiž jednoznačně určuje algebraickou strukturu a algebraická struktura zase jednoznačně určuje uspořádání.

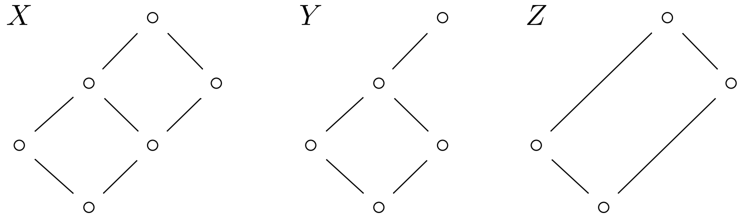
**Tvrzení 8.2.2.** *Buď $X$ svaz. Pro každé $x, a, b \in X$ platí*
- *(i) jestliže $a \leq b$, pak $a \wedge x \leq b \wedge x$;*
- *(ii) jestliže $a \leq b$, pak $a \vee x \leq b \vee x$;*
- *(iii) jestliže $x \leq a$, $x \leq b$, pak $x \leq a \wedge b$;*
- *(iv) jestliže $x \geq a$, $x \geq b$, pak $x \geq a \vee b$.*

*Důkaz.* (i) Nechť $a \leq b$, pak $a \wedge b = a$, načež $(a \wedge x) \wedge (b \wedge x) = a \wedge b \wedge x = a \wedge x$; odtud tvrzení. (ii) Cvičení. (iii) a (iv) plynou ihned z definice infima a suprema (cvičení). □

Obsahuje-li podmnožina svazu všechna infima a suprema všech dvojic svých prvků, je to také svaz.

**Definice 8.2.3.** *Podsvaz* svazu $(X, \wedge, \vee)$ je podmnožina $Y \subseteq X$ taková, že pro každé $x, y \in Y$ platí $x \wedge y \in Y$ a $x \vee y \in Y$.

**Příklad.** Svaz $X$ a jeho podsvazy $Y$ a $Z$:



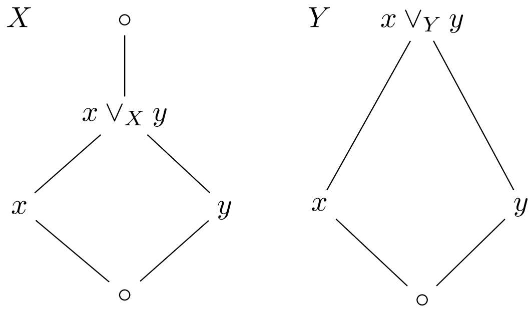

■

**Cvičení.** (1) Každá podmnožina řetězce je podsvaz.

(2) Každá podmnožina svazu, která je řetězcem, je podsvaz. ▷

Podmnožina svazu může být svazem vzhledem k indukovanému uspořádání, aniž by byla podsvazem.

**Příklad.** Svaz $X$ a jeho podmnožina $Y$, která je svazem, ale není podsvazem.




Supremum $x \vee_Y y$ v $Y$ je různé od suprema $x \vee_X y$ v $X$. ■

## 8.3. Úplné svazy

**Definice 8.3.1.** Svaz je *úplný*, má-li každá jeho podmnožina supremum i infimum.

**Příklad.** (1) Každý konečný svaz je úplný a platí $\inf\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$, $\sup\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$.

(2) Svaz $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ je úplný. Infima jsou průniky, suprema jsou sjednocení.

(3) Svaz $(\mathbb{N}, \leq)$ není úplný. Schází například supremum celé množiny $\mathbb{N}$. ■

Každý úplný svaz má největší prvek, je to jeho supremum, i nejmenší prvek, je to jeho infimum.

**Tvrzení 8.3.1.** *Buď $X$ uspořádaná množina, jejíž každá podmnožina má infimum. Pak $X$ je úplný svaz.*

*Důkaz.* Stačí ukázat, že každá podmnožina má supremum. Buď $Y \subseteq X$. Označme $Z$ množinu všech horních závor množiny $Y$ a položme $s = \inf Z$. Dokažme, že $s = \sup Y$.

Každý prvek množiny $Z$ je horní závora množiny $Y$, takže každý prvek množiny $Y$ je dolní závora množiny $Z$. Jelikož $s$ je největší dolní závora množiny $Z$, tak $y \leq s$ pro každé $y \in Y$, čili $s$ je zároveň horní závora množiny $Y$. A když $s \in Z$ a současně $s$ je (největší) dolní závora množiny $Z$, je to nejmenší prvek množiny $Z$, čili nejmenší horní závora množiny $Y$. □

**Příklad.** Předpoklad, že každá (i prázdná) podmnožina množiny $X$ má infimum, znamená, že $X$ má největší prvek. Například $(\mathbb{N}, \leq)$ není úplný svaz, přestože každá *neprázdná* podmnožina má infimum. ■

**Příklad.** Buď $G$ grupa. Označme $P(G)$ množinu všech podgrup grupy $G$. Pak $(P(G), \subseteq)$ je úplný svaz.

Buď $\{A_\iota \mid \iota \in I\} \subseteq P(G)$, tedy nějaký systém podgrup grupy $G$. Potom $\bigcap_{\iota \in I} A_\iota$ je také podgrupa (cvičení), která je zároveň $\inf\{A_\iota \mid \iota \in I\}$ (cvičení). Podle předchozího tvrzení je $(P(G), \subseteq)$ úplný svaz. Proto existuje i $\sup\{A_\iota \mid \iota \in I\}$ a je to průnik všech podgrup, které obsahují všechny podgrupy $A_\iota$.

Příklad je zformulován pro grupy, ale jeho analogie platí i pro jiné algebraické struktury. ■

**Cvičení.** Označme $E(X)$ množinu všech relací ekvivalence na množině $X$. Protože $E(X) \subset \mathcal{P}(X \times X)$, vzniká na $E(X)$ indukované uspořádání. Dokažte, že $E(X)$ je úplný svaz. ▷