

## 1. POLE

Uvažujme množinu všech reálných čísel. Reálná čísla sčítáme a násobíme, ke každému reálnému číslu existuje číslo opačné (součet čísla  $a$  k němu opačného čísla je roven 0), ke každému nenulovému reálnému číslu existuje číslo inverzní (převrácená hodnota, součin čísla  $a$  k němu inverzního čísla je roven 1). Pro libovolná reálná čísla  $a, b, c$  navíc platí

$$\begin{aligned} a + b &= b + a, & a \cdot b &= b \cdot a && \text{(součet a součin jsou komutativní,} \\ a + (b + c) &= (a + b) + c, & a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c && \text{asociativní} \\ a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c &&&& \text{a splňují distributivní zákon)} \end{aligned}$$

Každá množina obsahující aspoň 2 prvky (obvykle označované 0 a 1) s uvedenými operacemi s uvedenými vlastnostmi se nazývá *pole*. Příkladem pole je *pole komplexních čísel*, které značíme  $\mathbb{C}$ .

Každá podmnožina množiny komplexních čísel, která obsahuje 0 a 1, s každým číslem obsahuje k němu opačné, s každým nenulovým číslem obsahuje k němu inverzní a s libovolnými dvěma čísly obsahuje jejich součet i součin, se nazývá *číselné pole*.

Příklady číselných polí jsou množina komplexních čísel  $\mathbb{C}$ , množina reálných čísel  $\mathbb{R}$  a množina racionálních čísel  $\mathbb{Q}$ . Například množina celých čísel  $\mathbb{Z}$  a množina přirozených (kladných celých) čísel  $\mathbb{N}$  nejsou pole.

Je-li  $P$  pole a  $n$  přirozené číslo, potom  $P^n$  označuje množinu všech uspořádaných  $n$ -tic prvků pole  $P$ .

Polím se ještě budeme věnovat později, v tématu 7.

## 2. MATICE

### 2.1. Matice

**Definice 2.1.1.** Buď  $P$  pole, buďte  $m, n$  přirozená čísla. *Matice* typu  $m \times n$  nad polem  $P$  je tabulka o  $m$  řádcích a  $n$  sloupcích obsahující na každém místě nějaký prvek pole  $P$  (a nic jiného). Máme-li takovou matici  $A$ , pak prvek pole  $P$  v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupcu označujeme  $A_j^i$  a matici zapisujeme obvykle

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^m & A_2^m & \dots & A_n^m \end{pmatrix}$$

nebo stručněji  $A = (A_j^i)_{m \times n}$  nebo jen  $A = (A_j^i)$ .

Matici typu  $m \times n$  nad polem  $P$  je možné definovat také jako zobrazení z kartézského součinu  $\{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$  do pole  $P$ . Takové zobrazení tedy uspořádané dvojici  $(i, j)$  přiřazuje  $A_j^i \in P$  a můžeme ho zapsat právě ve tvaru tabulky, která má v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupcu prvek  $A_j^i$ .

Horním indexům říkáme *řádkové*, dolním indexům říkáme *sloupcové*. Pro pevně zvolené  $i$

$$A_{\circ}^i = (A_1^i \quad A_2^i \quad \dots \quad A_n^i)$$

je  $i$ -tý řádek matice  $A$ ; je to tedy matice typu  $1 \times n$ , někdy ji zapisujeme jako uspořádanou  $n$ -tici  $(A_1^i, A_2^i, \dots, A_n^i) \in P^n$ . Nulový řádek označme  $0_\circ$ . Pro pevně zvolené  $j$

$$A_j^\circ = \begin{pmatrix} A_j^1 \\ A_j^2 \\ \vdots \\ A_j^m \end{pmatrix}$$

je  $j$ -tý sloupek matice  $A$ ; je to tedy matice typu  $m \times 1$ , někdy ji zapisujeme jako uspořádanou  $m$ -tici  $(A_j^1, A_j^2, \dots, A_j^m) \in P^m$  nebo  $(A_j^1 \ A_j^2 \ \dots \ A_j^m)^\top$  nebo  $(A_j^1, A_j^2, \dots, A_j^m)^\top$ . Nulový sloupek označme  $0^\circ$ . To, že matice  $A$  je tvořena řádky  $A_\circ^i$ , resp. sloupky  $A_j^\circ$ , budeme někdy zapisovat

$$A = \begin{pmatrix} A_\circ^1 \\ A_\circ^2 \\ \vdots \\ A_\circ^m \end{pmatrix}, \quad \text{resp. } A = (A_1^\circ \ A_2^\circ \ \dots \ A_n^\circ).$$

Matice  $A = (A_j^i)$  a  $B = (B_j^i)$  se vzájemně rovnají, jestliže jsou stejného typu a na stejných místech mají stejné prvky, tedy jsou-li typu  $m \times n$  a pro každé  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  a každé  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  platí  $A_j^i = B_j^i$ .

**Definice 2.1.2.** Matice  $A = (A_j^i)_{m \times n}$  je

- *čtvercová*, jestliže  $m = n$ ,
- *diagonální*, jestliže je čtvercová a  $A_j^i = 0$  pro  $i \neq j$  (prvky  $A_j^i$  se také nazývají *diagonální* a tvoří *hlavní diagonálu*),
- *jednotková*, jestliže je diagonální a  $A_j^i = 1$  pro každé  $i$  (označujeme ji  $E_n$  nebo jen  $E$ ),
- *nulová*, jestliže má všechny prvky nulové (označujeme ji  $0_{m \times n}$  nebo jen  $0$ ),
- *horní* resp. *dolní trojúhelníková* (nebo v *horním* resp. *dolním trojúhelníkovém tvaru*), jestliže je čtvercová a pod resp. nad diagonálou má jen nuly, tedy  $A_j^i = 0$  pro  $i > j$  resp. pro  $i < j$ ,
- *schodovitá* (nebo ve *schodovitém tvaru*), jestliže každý nenulový řádek, kromě prvního, začíná zleva více nulami než řádek předchozí,
- v *Gaussově-Jordanově tvaru*, jestliže
  - (i) je ve schodovitém tvaru,
  - (ii) první (zleva) nenulové prvky všech nenulových řádků jsou 1,
  - (iii) ve sloupcích nad (a nejen pod) prvními nenulovými prvky všech nenulových řádků jsou jen 0.
- v *Gaussově kanonickém tvaru*, jestliže je rovna matici

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde  $E$  je jednotková matice a  $0$  označuje nulové matice příslušných typů.

Množinu všech matic typu  $m \times n$  nad polem  $P$  označujeme  $\mathcal{M}_{m \times n}(P)$  nebo  $P^{m \times n}$ ; v případě čtvercových matic také  $\mathcal{M}_n(P)$  nebo  $\text{gl}(n, P)$ .

**Příklad.** (1)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  je čtvercová matice,  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  není čtvercová.

(2)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  je diagonální matice,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  není diagonální.

(3)

$E_1 = (1)$ ,  $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  jsou jednotkové matice.

(4)

$0_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $0_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  jsou nulové matice.

(5)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  je horní,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  je dolní trojúhelníková matice.

(6)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  je matice ve schodovitém tvaru,

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$  není matice ve schodovitém tvaru.

(7)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  je matice v Gaussově–Jordanově tvaru,

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  není matice v Gaussově–Jordanově tvaru. ■

## 2.2. Operace s maticemi

### 2.2.1. Součet matic a násobek matice

**Definice 2.2.1.** Buďte  $A, B$  matice typu  $m \times n$  nad polem  $P$ . *Součet* matic  $A, B$  je matice  $A + B$  typu  $m \times n$  nad polem  $P$  taková, že pro všechna  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$(A + B)_j^i = A_j^i + B_j^i.$$

Sčítáme tedy jen matice stejného typu. Matice různých typů nelze sčítat.

**Definice 2.2.2.** Buďte  $A$  matice typu  $m \times n$  nad polem  $P$  a  $c \in P$ . Potom  $c$ -násobek matice  $A$  je matice  $cA$  typu  $m \times n$  nad polem  $P$  taková, že pro všechna  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$(cA)_j^i = cA_j^i.$$

Pro  $c = -1$  se matice  $(-1)A$  značí  $-A$  a nazývá se *opačná matice* k matici  $A$ .

**Příklad.** Pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \text{ je}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 + (-1) & 2 + 0 & 3 + 2 \\ 4 + 1 & 5 + (-3) & 6 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 13 \end{pmatrix},$$

$$6A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 24 & 30 & 36 \end{pmatrix}, \quad -B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -7 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

**Cvičení.** Spočítejte

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}. \quad \triangleright$$

**Tvrzení 2.2.1.** Necht'  $A, B, C$  jsou matice stejného typu nad polem  $P$  a  $c, k \in P$ . Pak

$$(1) A + B = B + A,$$

$$(5) 1A = A,$$

$$(2) A + (B + C) = (A + B) + C,$$

$$(6) c(A + B) = cA + cB,$$

$$(3) A + 0 = A,$$

$$(7) (c + k)A = cA + kA,$$

$$(4) A + (-A) = 0,$$

$$(8) c(kA) = (ck)A.$$

*Důkaz.* Uvedeme jen důkaz bodů (2) a (6), ostatní ponecháme jako cvičení.

(2) Máme dokázat, že matice  $A + (B + C)$  se rovná matici  $(A + B) + C$ . Předpokládejme, že  $A, B, C$  jsou typu  $m \times n$ . Potom i  $B + C$  a  $A + B$  jsou typu  $m \times n$ , a tedy i  $A + (B + C)$  a  $(A + B) + C$  jsou typu  $m \times n$ .

Pro každé  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  a  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  prvek v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupcu matice  $A + (B + C)$  je

$$(A + (B + C))_j^i = A_j^i + (B + C)_j^i = \quad (\text{podle definice součtu matic})$$

$$= A_j^i + (B_j^i + C_j^i) = \quad (\text{podle definice součtu matic})$$

$$= (A_j^i + B_j^i) + C_j^i = \quad (\text{díky asociativitě sčítání v poli})$$

$$= (A + B)_j^i + C_j^i = \quad (\text{podle definice součtu matic})$$

$$= ((A + B) + C)_j^i, \quad (\text{podle definice součtu matic})$$

což je prvek v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupcu matice  $(A + B) + C$ .

Dokázali jsme, že matice  $A + (B + C)$  a  $(A + B) + C$  jsou stejného typu a na stejných místech mají stejné prvky.

(6) Máme dokázat, že matice  $c(A + B)$  se rovná matici  $cA + cB$ . Předpokládejme, že  $A, B$  jsou typu  $m \times n$ . Potom i  $A + B$ ,  $cA$  a  $cB$  jsou typu  $m \times n$ , a tedy i  $c(A + B)$  a  $cA + cB$  jsou typu  $m \times n$ .

Pro každé  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  a  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  prvek v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupcu matice  $c(A + B)$  je

$$\begin{aligned} (c(A + B))_j^i &= c(A + B)_j^i && \text{(podle definice } c\text{-násobku matice)} \\ &= c(A_j^i + B_j^i) && \text{(podle definice součtu matic)} \\ &= cA_j^i + cB_j^i && \text{(díky distributivnímu zákonu v poli)} \\ &= (cA)_j^i + (cB)_j^i && \text{(podle definice } c\text{-násobku matice)} \\ &= (cA + cB)_j^i, && \text{(podle definice součtu matic)} \end{aligned}$$

což je prvek v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupcu matice  $cA + cB$ .

Dokázali jsme, že matice  $c(A + B)$  a  $cA + cB$  jsou stejného typu a na stejných místech mají stejné prvky.  $\square$

Uvedli jsme si, že řádky a sloupky matice chápeme jako matice. Můžeme je tedy také násobit prvky příslušného pole, můžeme sčítat řádky a sčítat sloupky, jsou-li stejného typu a nad stejným polem.

Následující definici formulujeme pouze pro řádky matice, ale obdobně lze formulovat pro sloupky, uspořádané  $n$ -tice a matice.

**Definice 2.2.3.** Buďte  $A_{\circ}^{i_1}, A_{\circ}^{i_2}, \dots, A_{\circ}^{i_k}$  řádky matice nad polem  $P$ ,  $c_1, c_2, \dots, c_k \in P$ . *Lineární kombinace* řádků  $A_{\circ}^{i_1}, A_{\circ}^{i_2}, \dots, A_{\circ}^{i_k}$  s *koefficienty*  $c_1, c_2, \dots, c_k$  je řádek

$$c_1 A_{\circ}^{i_1} + c_2 A_{\circ}^{i_2} + \dots + c_k A_{\circ}^{i_k} = \sum_{j=1}^k c_j A_{\circ}^{i_j}.$$

Máme-li prázdnou množinu řádků (tedy, nemáme žádný řádek), jejich lineární kombinaci definujeme jako nulový řádek. Takže, nulový řádek je lineární kombinací řádků z prázdné množiny.

### 2.2.2. Součín

**Definice 2.2.4.** Buďte  $A$  matice typu  $m \times n$  a  $B$  matice typu  $n \times p$  nad polem  $P$ . *Součín* matic  $A, B$  (v tomto pořadí) je matice  $A \cdot B$  (obvykle označovaná jen  $AB$ ) typu  $m \times p$  nad polem  $P$  taková, že pro všechna  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, p\}$

$$(AB)_j^i = A_1^i B_j^1 + A_2^i B_j^2 + \dots + A_n^i B_j^n = \sum_{k=1}^n A_k^i B_j^k.$$

Matice  $B$  má tedy tolik řádků, kolik má matice  $A$  sloupců. Prvek matice  $AB$  v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupcu získáme tedy tak, že sečteme součiny prvků v  $i$ -tém řádku matice  $A$  s odpovídajícími prvky v  $j$ -tém sloupcu matice  $B$ . Tedy

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A_1^1 B_1^1 + A_2^1 B_1^2 + \dots + A_n^1 B_1^n & \dots & A_1^1 B_p^1 + A_2^1 B_p^2 + \dots + A_n^1 B_p^n \\ A_1^2 B_1^1 + A_2^2 B_1^2 + \dots + A_n^2 B_1^n & \dots & A_1^2 B_p^1 + A_2^2 B_p^2 + \dots + A_n^2 B_p^n \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^m B_1^1 + A_2^m B_1^2 + \dots + A_n^m B_1^n & \dots & A_1^m B_p^1 + A_2^m B_p^2 + \dots + A_n^m B_p^n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_1^1 B_{\circ}^1 + A_2^1 B_{\circ}^2 + \dots + A_n^1 B_{\circ}^n \\ A_1^2 B_{\circ}^1 + A_2^2 B_{\circ}^2 + \dots + A_n^2 B_{\circ}^n \\ \vdots \\ A_1^m B_{\circ}^1 + A_2^m B_{\circ}^2 + \dots + A_n^m B_{\circ}^n \end{pmatrix} = \\ &= (B_1^1 A_{\circ}^1 + B_1^2 A_{\circ}^2 + \dots + B_1^n A_{\circ}^n \quad \dots \quad B_p^1 A_{\circ}^1 + B_p^2 A_{\circ}^2 + \dots + B_p^n A_{\circ}^n). \end{aligned}$$

Čili, první řádek matice  $AB$  získáme tak, že vezmeme  $A_1^1$ -násobek řádku  $B_1^1$ ,  $A_2^1$ -násobek řádku  $B_2^1$ , ...,  $A_n^1$ -násobek řádku  $B_n^1$  a všechny tyto násobky sečteme. Je to tedy lineární kombinace řádků matice  $B$  s koeficienty z prvního řádku matice  $A$ .

Obdobně získáme ostatní řádky matice  $AB$ . Obecně,  $i$ -tý řádek matice  $AB$  získáme tak, že pro každé  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  prvkem  $A_k^i$  vynásobíme  $k$ -tý řádek matice  $B$  a všechny tyto násobky sečteme. Takže  $i$ -tý řádek matice  $AB$  je lineární kombinace řádků matice  $B$  s koeficienty z  $i$ -tého řádku matice  $A$ .

Analogicky, první sloupek matice  $AB$  získáme tak, že vezmeme  $B_1^1$ -násobek sloupku  $A_1^1$ ,  $B_2^1$ -násobek sloupku  $A_2^1$ , ...,  $B_n^1$ -násobek sloupku  $A_n^1$  a všechny tyto násobky sečteme. Je to tedy lineární kombinace sloupků matice  $A$  s koeficienty z prvního sloupku matice  $B$ .

Obdobně získáme ostatní sloupky matice  $AB$ . Obecně,  $j$ -tý sloupek matice  $AB$  získáme tak, že pro každé  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  prvkem  $B_j^k$  vynásobíme  $k$ -tý sloupek matice  $A$  a všechny tyto násobky sečteme. Takže  $j$ -tý sloupek matice  $AB$  je lineární kombinace sloupků matice  $A$  s koeficienty z  $j$ -tého sloupku matice  $B$ .

Nejsou-li typy matic v uvedeném vztahu (druhá má tolik řádků, kolik má první sloupků), nelze je (v daném pořadí) násobit, příslušný součin neexistuje.

**Příklad.** (1) Pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ je}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1 \ 0) + 2 \cdot (1 \ 2) \\ 3 \cdot (-1 \ 0) + 4 \cdot (1 \ 2) \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \left( -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 & (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 \cdot (1 \ 2) + 0 \cdot (3 \ 4) \\ 1 \cdot (1 \ 2) + 2 \cdot (3 \ 4) \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \left( 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

(2) Pro

$$A = (1 \ 2), B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ je}$$

$$AB = (1 \cdot 0 + 2 \cdot 3) = (6),$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 & 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(3) Pro

$$A = (1 \ 2), B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ je } AB = (2 \ 1), BA \text{ neexistuje.} \quad \blacksquare$$

Předcházející příklady ukazují, že násobení matic není komutativní, tedy nemusí platit  $AB = BA$ .

**Cvičení.** Spočítejte

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

▷

**Cvičení.** (1) Je-li  $i$ -tý řádek matice  $A$  nulový, pak  $i$ -tý řádek matice  $AB$  je také nulový.

(2) Je-li  $j$ -tý sloupek matice  $B$  nulový, pak  $j$ -tý sloupek matice  $AB$  je také nulový. ▷

**Tvrzení 2.2.2.** *Nechť  $A, B, C$  jsou matice nad polem  $P$  takové, že níže uvedené operace jsou definovány, a  $c \in P$ . Pak platí*

$$(1) A(BC) = (AB)C,$$

$$(4) (A + B)C = AC + BC,$$

$$(2) AE = EA = A,$$

$$(5) c(AB) = (cA)B = A(cB).$$

$$(3) A(B + C) = AB + AC,$$

*Důkaz.* Uvedeme jen důkaz bodů (1) a (3), ostatní ponecháme jako cvičení.

(1) Předpokládejme, že  $A$  je matice typu  $m \times n$ ,  $B$  je matice typu  $n \times p$  a  $C$  je matice typu  $p \times q$ . Potom  $AB$  je matice typu  $m \times p$  a  $BC$  je matice typu  $n \times q$ , takže  $A(BC)$  a  $(AB)C$  jsou matice typu  $m \times q$ .



$$\begin{aligned}
(A(BC))_j^i &= \sum_{k=1}^n A_k^i (BC)_j^k = && \text{(podle definice součinu matic)} \\
&= \sum_{k=1}^n A_k^i \sum_{l=1}^p (B_l^k C_j^l) = && \text{(podle definice součinu matic)} \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p A_k^i (B_l^k C_j^l) = && \text{(díky distributivnímu zákonu v poli)} \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p (A_k^i B_l^k) C_j^l = && \text{(díky asociativitě součinu v poli)} \\
&= \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^n (A_k^i B_l^k) C_j^l = && \text{(díky komutativitě součtu v poli)} \\
&= \sum_{l=1}^p (AB)_l^i C_j^l = && \text{(podle definice součinu matic)} \\
&= ((AB)C)_j^i. && \text{(podle definice součinu matic)}
\end{aligned}$$

(3) Předpokládejme, že  $A$  je matice typu  $m \times n$  a  $B, C$  jsou matice typu  $n \times p$ . Potom  $A(B + C)$  a  $AB + AC$  jsou matice typu  $m \times p$  a pro každé  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  a  $j \in \{1, 2, \dots, p\}$  platí

$$\begin{aligned}
(A(B + C))_j^i &= \sum_{k=1}^n A_k^i (B + C)_j^k = && \text{(podle definice součinu matic)} \\
&= \sum_{k=1}^n A_k^i (B_j^k + C_j^k) = && \text{(podle definice součtu matic)} \\
&= \sum_{k=1}^n (A_k^i B_j^k + A_k^i C_j^k) = && \text{(díky distributivnímu zákonu v poli)} \\
&= \sum_{k=1}^n A_k^i B_j^k + \sum_{k=1}^n A_k^i C_j^k = && \text{(díky vlastnostem sčítání v poli)} \\
&= (AB)_j^i + (AC)_j^i = && \text{(podle definice součinu matic)} \\
&= (AB + AC)_j^i. && \text{(podle definice součtu matic)} \quad \square
\end{aligned}$$