9. přednáška, 26. 4. 2022

14.1.2. Minimální polynom

Příklad. Matice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

má charakteristický polynom $\chi_A = x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$, ale $q = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ je také anulující polynom matice A (ověřte). ■

Poslední příklad ukazuje, že charakteristický polynom může mít netriviálního dělitele, který je rovněž anulujícím polynomem. Ukažme, že mezi anulujícími polynomy existuje jeden, který dělí všechny ostatní.

Definice 14.1.2. Anulující polynom se nazývá *minimální polynom*, je-li normovaný a nejmenšího stupně ze všech anulujících polynomů.

Tvrzení 14.1.2. *Každý anulující polynom je dělitelný minimálním polynomem.*

Důkaz. Buď f anulující polynom matice A, buď g minimální polynom matice A. Dělme se zbytkem: $f = qg + r$, kde buď $r = 0$ nebo $\deg r < \deg g$. Do rovnosti dosadíme A a dostaneme

$$0 = f(A) = q(A)g(A) + r(A) = r(A),$$

protože f a g jsou anulující polynomy. Kdyby $r \neq 0$, byl by to anulující polynom nižšího stupně než minimální polynom g, což je spor, a proto $r = 0$ a g je dělitelem f. □

Důsledek. *Ke každé lineární transformaci konečněrozměrného vektorového prostoru resp. ke každé čtvercové matici existuje minimální polynom a je jediný.*

Cvičení. Dokažte jednoznačnost minimálního polynomu.

14.1.3. Invariantní podprostory

Je-li $U \subseteq V$ podprostor, pak symbolem fU označujeme jeho obraz při zobrazení f, to jest, podprostor $\{f(u) | \ u \in U\}$.

Definice 14.1.3. Podprostor $U \subseteq V$ se nazývá *invariantní* vzhledem k lineární transformaci f, jestliže $fU \subseteq U$, tj. když pro každé $u \in U$ je $f(u) \in U$.

Je-li U invariantní podprostor, pak zobrazení $U \to U$, zadané předpisem $u \mapsto f(u)$, nazýváme *restrikce* (česky *ohraničení* nebo *zúžení*) lineárního zobrazení f na invariantní podprostor U. Značí se $f|_U \colon U \to U$ a je zřejmě opět lineární (ověřte).

Příklad. (1) Celý prostor V a nulový podprostor jsou invariantní podprostory vzhledem ke každé lineární transformaci.

(2) Je-li $f\colon v \mapsto cv$, pak je každý podprostor invariantní.

(3) Je-li u vlastní vektor s vlastní hodnotou c, pak $[\![u]\!]$ je invariantní podprostor a $f|_{[\![u]\!]}$ je zobrazení $v \mapsto cv$.

(4) Mějme rotaci $\varphi\colon E^3 \to E^3$ kolem zvolené pevné osy L procházející počátkem 0 o úhel $\alpha \in (0, 2\pi)$. Invariantní podprostory jsou nulový podprostor $\{0\}$, osa rotace L, její ortogonální doplněk $L^\perp$ (rovina procházející počátkem kolmo k L) a celý prostor E^3. Libovolný vektor $u \in L$ se zobrazí sám na sebe, proto $\varphi|_L$ je identické zobrazení id_L. Libovolný vektor $v \in L^\perp$ zůstane v rovině $L^\perp$ a $\varphi|_{L^\perp}$ je otáčení roviny $L^\perp$ o úhel α.

(5) Mějme zrcadlení ζ v prostoru E^3 vzhledem k rovině U procházející počátkem 0. Invariantní podprostory jsou nulový podprostor $\{0\}$, rovina U a každý její podprostor $V \subseteq U$, ortogonální doplněk $U^\perp$ (přímka procházející počátkem kolmo k U) a celý prostor E^3. Zobrazení $\zeta|_V$ je identické zobrazení id_V. Zobrazení $\zeta|_{U^\perp}$ je zrcadlení přímky $U^\perp$ vzhledem k počátku 0. ■

Cvičení. (1) Jednorozměrný podprostor $[\![u]\!]$, $u \neq 0$, je invariantní právě tehdy, když u je vlastní vektor. Dokažte.

(2) Průnik a součet invariantních podprostorů jsou invariantní podprostory. Dokažte.

(3) $\operatorname{Ker} f$ je invariantní podprostor. Dokažte. Co je $f|_{\operatorname{Ker} f}$?

(4) $\operatorname{Im} f$ je invariantní podprostor. Dokažte.

(5) Buď $v \in V$ libovolný vektor. Dokažte, že $[\![v, f(v), f(f(v)), f(f(f(v))), \ldots]\!]$ je invariantní podprostor.

(6) Nechť lineární transformace $f, g\colon V \to V$ komutují, to jest, $f \circ g = g \circ f$. Buď $U \subseteq V$ invariantní podprostor vzhledem k transformaci f. Pak gU je též invariantní podprostor vzhledem k transformaci f. ▷

14.1.4. První rozklad lineární transformace

Tvrzení 14.1.3. *Buď q anulující polynom lineární transformace $f\colon V \to V$ a nechť existuje rozklad $q = q_1 \cdots q_n$, kde $q_1, \ldots, q_n$ jsou po dvou nesoudělné ($D(q_i, q_j) = 1$ pro $i \neq j$). Pro $i \in \{1, \ldots, n\}$ označme $U_i = \operatorname{Ker} q_i(f)$. Pak platí:*

(1) každý podprostor U_i je invariantní;
(2) $V = U_1 \dot{+} \cdots \dot{+} U_n$;
(3) pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$ polynom q_i je anulujícím polynomem transformace $f|_{U_i}$.

Důkaz. (1) Nechť $u \in U_i$, tj. $q_i(f)(u) = 0$. Potom

$$q_i(f)(f(u)) = (q_i(f) \circ f)(u) = (f \circ q_i(f))(u) = f(q_i(f)(u)) = f(0) = 0$$

(použili jsme to, že f a $q_i(f)$ spolu komutují podle Důsledku Tvrzení 12.5.7). Tudíž, $f(u) \in U_i$.

(2) Nejdříve případ $n = 2$. Nechť $q = q_1 q_2$ a $D(q_1, q_2) = 1$. Pak existují polynomy p_1, p_2 takové, že $1 = q_1 p_1 + q_2 p_2$. Dosazením f získáváme rovnost

$$\mathrm{id} = q_1(f) \circ p_1(f) + q_2(f) \circ p_2(f),$$

takže pro libovolný vektor $v \in V$ platí

$$v = q_1(f)(p_1(f)(v)) + q_2(f)(p_2(f)(v)). \tag{5}$$

Ukažme, že první sčítanec $q_1(f)(p_1(f)(v))$ z (5) leží v U_2. Označíme-li $w = p_1(f)(v)$, stačí ověřit, že $q_1(f)(w) \in \operatorname{Ker} q_2(f)$:

$$q_2(f)(q_1(f)(w)) = (q_2(f) \circ q_1(f))(w) = (q_2 q_1)(f)(w) = q(f)(w) = 0,$$

protože q je anulující polynom pro f. Podobně se ukáže, že druhý ze sčítanců leží v U_1. Tudíž, $v \in U_1 + U_2$. Protože v byl libovolný vektor z V, máme $V = U_1 + U_2$.

Ukažme ještě, že $U_1 \cap U_2 = 0$. Nechť tedy $v \in U_1 \cap U_2$, tj. $q_1(f)(v) = 0$ a $q_2(f)(v) = 0$. Rovnost (5) platí i po záměně $p \leftrightarrow q$ (protože $p_i(f)$ a $q_i(f)$ spolu komutují podle Důsledku Tvrzení 12.5.7), načež

$$v = p_1(f)(q_1(f)(v)) + p_2(f)(q_2(f)(v)) = p_1(f)(0) + p_2(f)(0) = 0,$$

protože $p_1(f), p_2(f)$ jsou lineární zobrazení. Dokázali jsme tedy, že $V = U_1 \dot{+} U_2$.

Obecný případ $n > 2$ se dokáže indukcí (cvičení).

(3) Polynom q_i je anulujícím polynomem transformace $f|_{U_i}$, protože $\operatorname{Ker} q_i(f) = U_i$, načež
$\operatorname{Ker} q_i(f|_{U_i}) = \operatorname{Ker}(q_i(f)|_{U_i}) = U_i \cap \operatorname{Ker} q_i(f) = U_i$, a tedy $q_i(f|_{U_i}) = 0$. □

Tvrzení 14.1.4. *Nechť existuje přímý rozklad $V = U_1 \dot{+} U_2$, kde U_1, U_2 jsou invariantní podprostory vzhledem k lineární transformaci f. Zvolme nějakou bázi $(e_1, \dots, e_m)$ podprostoru U_1 a nějakou bázi $(e_{m+1}, \dots, e_n)$ podprostoru U_2. Pak $(e_1, \dots, e_n)$ je báze prostoru V a transformace f v ní má matici tvaru*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Označíme-li

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

pak A_i je matice lineární transformace $f|_{U_i}$.

Důkaz. Ověřte, že $(e_1, \dots, e_n)$ je báze prostoru V.

Prvních m sloupků matice A je tvořeno souřadnicemi vektorů $f(e_1), \dots, f(e_m)$ v bázi $(e_1, \dots, e_n)$. Vektory $f(e_1), \dots, f(e_m)$ ovšem leží v U_1 s bází $(e_1, \dots, e_m)$, takže koeficienty u vektorů $e_{m+1}, \dots, e_n$ v příslušné lineární kombinaci budou nulové.

Ověřte, že A_1 je matice lineární transformace $f|_{U_1}$ vzhledem k bázi $(e_1, \dots, e_m)$.

Zbytek analogicky. □

O shora uvedené matici A říkáme, že je v *blokově diagonálním tvaru* s bloky A_1, A_2 na diagonále. Stručně zapisujeme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Říkáme též, že A je *přímý součet submatic* A_1 a A_2.

Podobně se v případě přímého součtu $V = U_1 \dot{+} \dots \dot{+} U_n$ invariantních podprostorů $U_1, \dots, U_n$ matice zobrazení f rozpadá na přímý součet submatic $A_1, \dots, A_n$ odpovídajících lineárním zobrazením $f|_{U_1}, \dots, f|_{U_n}$:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}.$$

O matici A rovněž pravíme, že je *blokově diagonální*.

V ideálním případě lze prostor V rozložit na přímý součet jednorozměrných invariantních podprostorů, generovaných vlastními vektory, což je nám již známý případ diagonalizovatelné matice.

Příklad. Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = (x-1)(x^2 - 4x + 5)$ (ověřte). Vidíme, že polynom χ_A je součinem nesoudělných polynomů $q_1 = x - 1$ a $q_2 = x^2 - 4x + 5$.

Matice A představuje lineární zobrazení $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $u \mapsto Au$. Počítejme $U_1 = \operatorname{Ker} q_1(\alpha) = \operatorname{Ker}(\alpha - \mathrm{id})$. Jádro $\operatorname{Ker}(\alpha - \mathrm{id})$ vypočteme řešením rovnice $(\alpha - \mathrm{id})(u) = 0$, což je homogenní soustava s maticí

$$q_1(A) = A - E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a fundamentálním řešením $e_1 = (1, 1, 1)$ (ověřte). Dostáváme jednorozměrný invariantní podprostor

$$U_1 = \operatorname{Ker} q_1(\alpha) = [\![(1,1,1)]\!].$$

Podobně $U_2 = \operatorname{Ker} q_2(\alpha) = \operatorname{Ker}(\alpha^2 - 4\alpha + 5\,\mathrm{id})$. Toto jádro vypočteme řešením rovnice

$$(\alpha^2 - 4\alpha + 5\,\mathrm{id})(u) = 0,$$

což je homogenní soustava s maticí

$$q_2(A) = A^2 - 4A + 5E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a fundamentálním řešením $e_2 = (0, 0, 1), e_3 = (1, -1, 0)$ (ověřte). Dostáváme dvojrozměrný invariantní podprostor

$$U_2 = \operatorname{Ker} q_2(\alpha) = [\![(0,0,1), (1,-1,0)]\!].$$

Získali jsme (a) přímý rozklad $\mathbb{R}^3 = U_1 \dotplus U_2$ na invariantní podprostory U_1 a U_2; (b) „novou“ bázi (e_1, e_2, e_3). Matici přechodu od „staré“ kanonické báze k „nové“ bázi označme Q. Inverzní matice Q^{-1} je matice přechodu od „nové“ báze ke kanonické bázi. Tedy

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice zobrazení α vzhledem k „nové“ bázi je tedy blokově diagonální matice

$$QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

■

Příklad. Nechť $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineární zobrazení, jehož matice vzhledem ke kanonické („staré“) bázi $((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom matice A je $\chi_A = -x^2(x-2)$ a můžeme jej zapsat jako součin nesoudělných polynomů $q_1 = -x^2$ a $q_2 = x - 2$. Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 2$.

Tedy

$$q_1(A) = -A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -6 & 6 & -12 \\ -4 & 4 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad q_2(A) = A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Potom $U_1 = \operatorname{Ker} q_1(A) = \operatorname{Ker}(-A^2)$ je množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí $-A^2$ a $U_2 = \operatorname{Ker} q_2(A) = \operatorname{Ker}(A - 2E)$ je množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí $A - 2E$. Tedy $U_1 = [\![(-2,0,1),(1,1,0)]\!]$ a $U_2 = [\![(1,3,2)]\!]$.

Takže prostor $\mathbb{R}^3$ je přímým součtem invariantních podprostorů U_1, U_2 a vektory $(-2,0,1),(1,1,0),(1,3,2)$ tvoří „novou" bázi prostoru $\mathbb{R}^3$. Matice přechodu od „staré" báze k „nové" bázi je

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3/2 & 5/2 & -3 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a matice zobrazení α vzhledem k „nové" bázi je

$$A' = Q \cdot A \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

14.2. Druhý rozklad lineární transformace

Úmluva. Všude $P = \mathbb{C}$.

V přednášce o vlastních vektorech jsme se seznámili s diagonalizovatelnými transformacemi. V bázi složené z vlastních vektorů v_i mají diagonální matici s vlastními čísly λ_i na diagonále.

Obecná lineární transformace nemusí mít bázi složenou z vlastních vektorů. Nicméně, jak ukážeme, lze zkonstruovat jinou významnou bázi — Jordanovu. Matice lineární transformace v Jordanově bázi je tzv. Jordanova matice. Opět má na diagonále vlastní čísla, ale může obsahovat i nenulové prvky v řadě sousedící s diagonálou (všechny ovšem rovny 1).

Východiskem pro nalezení Jordanovy báze bude první rozklad, příslušný rozkladu charakteristického polynomu (nebo libovolného jiného anulujícího polynomu) χ_f na nesoudělné součinitele. Při $P = \mathbb{C}$ ovšem existuje rozklad na kořenové činitele

$$\chi_f = (x - \xi_1)^{k_1} \cdots (x - \xi_s)^{k_s}, \quad \xi_i \neq \xi_j \text{ pro } i \neq j,$$

a pro $i \neq j$ jsou polynomy $(x - \xi_i)^{k_i}$ a $(x - \xi_j)^{k_j}$ nesoudělné. Invariantní podprostory prvního rozkladu pak jsou

$$U_i = \operatorname{Ker}(f - \xi_i \operatorname{id})^{k_i}.$$

Na jednotlivých invariantních podprostorech vznikají restrikce $f|_{U_i} \colon U_i \to U_i$. Označíme-li $g_i = f - \xi_i \operatorname{id}$, pak $\operatorname{Ker} g_i^{k_i} = U_i$, a tedy $(g|_{U_i})^{k_i} = 0$.

Má tedy smysl studovat transformace $f \colon U \to U$ takové, že pro některé číslo ξ transformace $g = f - \xi \operatorname{id}$ splňuje $g^k = 0$. Výsledky použijeme pro $U = U_i$ a $g = f|_{U_i} - \xi_i \operatorname{id}_{U_i}$, $i = 1, \dots, s$.

14.2.1. Rozklad na součet cyklických podprostorů

Definice 14.2.1. Transformace $g \colon U \to U$ (resp. čtvercová matice B) se nazývá *nilpotentní*, jestliže existuje celé číslo $k \geq 1$ takové, že $g^k = 0$ (resp. $B^k = 0$).

Cvičení. Transformace g je nilpotentní právě tehdy, když je její matice B (v libovolné bázi) nilpotentní. $\triangleright$

Definice 14.2.2. Podprostor $T \subseteq U$ se nazývá *cyklický* vzhledem k transformaci $g\colon U \to U$, jestliže má bázi $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ takovou, že

$$g(e_1) = e_2, \quad g(e_2) = e_3, \quad \dots, \quad g(e_{n-1}) = e_n, \quad g(e_n) = 0.$$

Bázi $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ nazýváme *cyklická báze.*

Schematicky,

$$e_1 \underset{g}{\longrightarrow} e_2 \underset{g}{\longrightarrow} \cdots e_{n-1} \underset{g}{\longrightarrow} e_n \underset{g}{\longrightarrow} 0.$$

Definice 14.2.3. Matice

$$J_1(\xi) = (\xi), \quad J_2(\xi) = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 1 & \xi \end{pmatrix}, \quad J_3(\xi) = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 1 & \xi & 0 \\ 0 & 1 & \xi \end{pmatrix},$$

$$J_4(\xi) = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi \end{pmatrix}, \quad \text{atd.}$$

se nazývají *Jordanovy bloky* (též *Jordanovy buňky*).

Tvrzení 14.2.1. *Buď T cyklický podprostor nilpotentní transformace g, buď $f = g + \xi\,\mathrm{id}$. Pak*

(1) T je invariantní vzhledem k lineárním transformacím g i f;
(2) $g|_T$ má v cyklické bázi matici $J_n(0)$;
(3) $f|_T$ má v cyklické bázi matici $J_n(\xi)$.

Důkaz. Cvičení. □

Často se setkáváme s odlišnou definicí Jordanových buněk — jedničky stojí v řadě těsně *nad* diagonálou. To odpovídá opačnému pořadí vektorů cyklické báze, tj. $(e_n, \dots, e_2, e_1)$.

Lemma 14.2.2. *Buď $h\colon U \to V$ lineární zobrazení mezi konečněrozměrnými vektorovými prostory. Zvolme libovolně bázi v $\operatorname{Ker} h$ a doplňme ji do báze v U nějakými vektory $e_1, \dots, e_m$. Pak vektory $h(e_1), \dots, h(e_m)$ tvoří bázi v $\operatorname{Im} h$.*

Důkaz. Cvičení (viz důkaz formule $\dim U = \dim \operatorname{Ker} h + \dim \operatorname{Im} h$ v Tvrzení 12.2.3). □

Tvrzení 14.2.3. *Buď $g\colon U \to U$ nilpotentní transformace. Pak existují cyklické podprostory $T_1, \dots, T_r \subseteq U$ takové, že $U = T_1 \dot{+} \cdots \dot{+} T_r$.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme uvedením praktického algoritmu pro nalezení cyklických podprostorů a jejich cyklických bází. Popis algoritmu tvoří věty psané kurzívou.

Máme $U = \operatorname{Ker} g^k$ pro jisté k (protože g je nilpotentní). Bez újmy na obecnosti je číslo k minimální, to jest, $g^{k-1} \neq 0$, a tudíž $\operatorname{Ker} g^{k-1} \neq U$.

1. *Zvolíme libovolně bázi v $\operatorname{Ker} g^{k-1}$ a doplníme ji do báze v $U = \operatorname{Ker} g^k$ nějakými vektory $e_1, \dots, e_{m_1}$.*

   Podle lemmatu vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1})$ tvoří bázi v $\operatorname{Im} g^{k-1}$ a jsou tedy lineárně nezávislé. Navíc, jelikož $g^k = 0$, máme $g(e_1), \dots, g(e_{m_1}) \in \operatorname{Ker} g^{k-1}$.

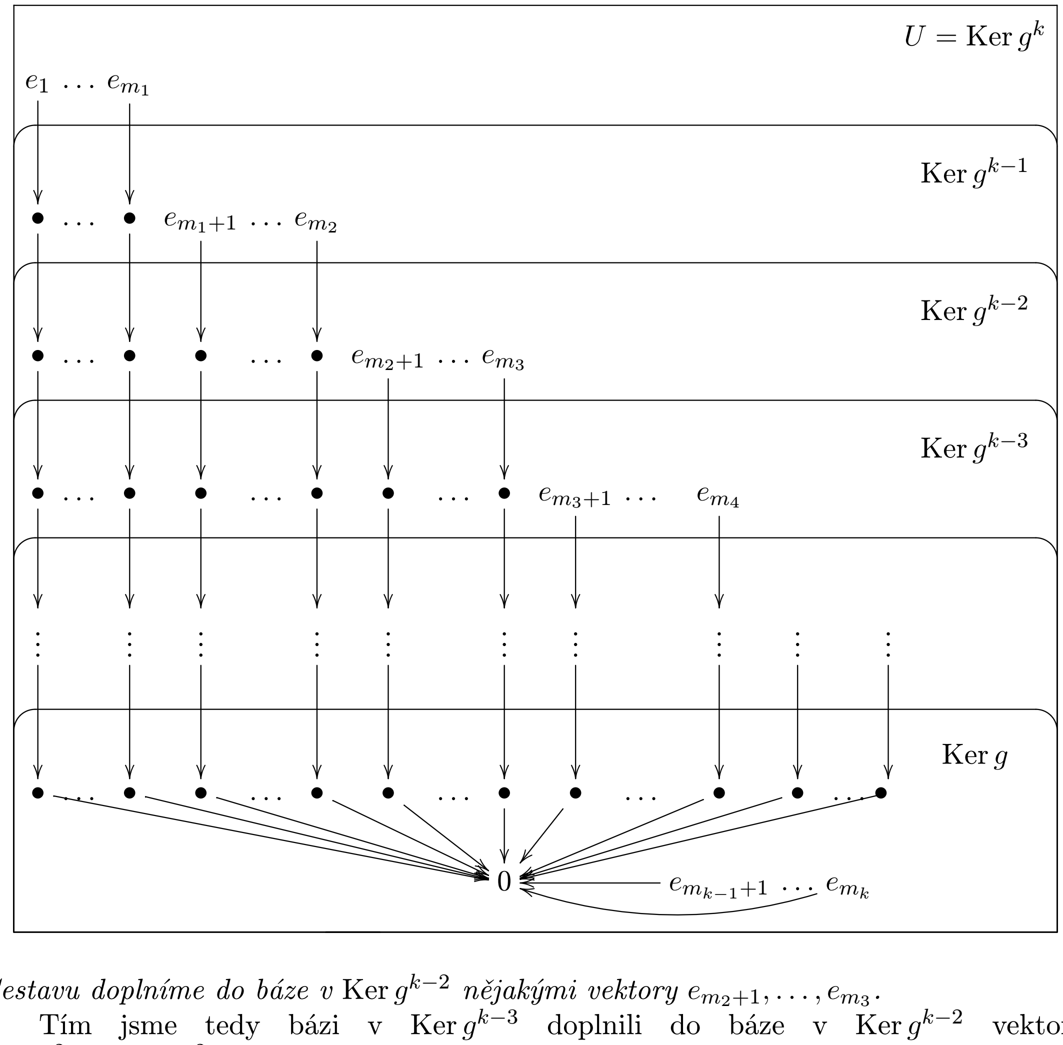
2. *Zvolíme libovolně bázi v $\operatorname{Ker} g^{k-2}$ a přidáme k ní vektory $g(e_1), \dots, g(e_{m_1}) \in \operatorname{Ker} g^{k-1}$.*
   Tato sestava je lineárně nezávislá. Skutečně, vezměme si lineární kombinaci všech vektorů z této sestavy, která je rovna nulovému vektoru. Máme tedy skaláry $c_1, \dots, c_{m_1}$, takové, že $c_1 g(e_1) + \cdots + c_{m_1} g(e_{m_1}) \in \operatorname{Ker} g^{k-2}$. Pak ovšem $0 = g^{k-2}(c_1 g(e_1) + \cdots + c_{m_1} g(e_{m_1})) = c_1 g^{k-1}(e_1) + \cdots + c_{m_1} g^{k-1}(e_{m_1})$, a tedy $c_1 = \cdots = c_{m_1} = 0$, protože vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1})$ jsou lineárně nezávislé (viz výše). A potom také ostatní koeficienty v uvažované lineární kombinaci jsou nulové, protože příslušné vektory tvoří bázi.

Sestavu doplníme do báze v $\operatorname{Ker} g^{k-1}$ *nějakými vektory* $e_{m_1+1}, \dots, e_{m_2}$.

Tím se vlastně báze v $\operatorname{Ker} g^{k-2}$ doplní do báze v $\operatorname{Ker} g^{k-1}$ vektory $g(e_1), \dots, g(e_{m_1}), e_{m_1+1}, \dots, e_{m_2}$. Z lemmatu potom vyplývá, že vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1}), g^{k-2}(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2})$ tvoří bázi v $\operatorname{Im}(g^{k-2}|_{\operatorname{Ker} g^{k-1}})$ a jsou tedy lineárně nezávislé.

3. *Zvolíme libovolně bázi v* $\operatorname{Ker} g^{k-3}$ *a připojíme k ní vektory* $g^2(e_1), \dots, g^2(e_{m_1})$, $g(e_{m_1+1}), \dots, g(e_{m_2})$ $\in \operatorname{Ker} g^{k-2}$.

Tato sestava je lineárně nezávislá. Skutečně, vezměme si lineární kombinaci všech vektorů z této sestavy, která je rovna nulovému vektoru. Máme tedy skaláry $c_1, \dots, c_{m_1}, c_{m_1+1}, \dots, c_{m_2}$, takové, že $c_1 g^2(e_1) + \cdots + c_{m_1} g^2(e_{m_1}) + c_{m_1+1} g(e_{m_1+1}) + \cdots + c_{m_2} g(e_{m_2}) \in \operatorname{Ker} g^{k-3}$. Pak ovšem $0 = g^{k-3}(c_1 g^2(e_1) + \cdots + c_{m_1} g^2(e_{m_1}) + c_{m_1+1} g(e_{m_1+1}) + \cdots + c_{m_2} g(e_{m_2})) = c_1 g^{k-1}(e_1) + \cdots + c_{m_1} g^{k-1}(e_{m_1}) + c_{m_1+1} g^{k-2}(e_{m_1+1}) + \cdots + c_{m_2} g^{k-2}(e_{m_2})$, a tedy $c_1 = \cdots = c_{m_1} = c_{m_1+1} = \cdots = c_{m_2} = 0$, protože vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1}), g^{k-2}(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2})$ jsou lineárně nezávislé (viz výše). A potom také ostatní koeficienty v uvažované lineární kombinaci jsou nulové, protože příslušné vektory tvoří bázi.



Sestavu doplníme do báze v $\operatorname{Ker} g^{k-2}$ *nějakými vektory* $e_{m_2+1}, \dots, e_{m_3}$.

Tím jsme tedy bázi v $\operatorname{Ker} g^{k-3}$ doplnili do báze v $\operatorname{Ker} g^{k-2}$ vektory $g^2(e_1), \dots, g^2(e_{m_1}), g(e_{m_1+1}), \dots, g(e_{m_2}), e_{m_2+1}, \dots, e_{m_3}$. A potom vektory $g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1}), g^{k-2}(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2}), g^{k-3}(e_{m_2+1}), \dots, g^{k-3}(e_{m_3})$ tvoří podle lemmatu bázi v $\operatorname{Im}(g^{k-3}|_{\operatorname{Ker} g^{k-2}})$ a jsou tedy lineárně nezávislé.

Podobných kroků provedeme k (v posledním kroku doplňujeme bázi podprostoru $\operatorname{Ker} g^0 = \operatorname{Ker} \mathrm{id} = \{0\}$ do báze v podprostoru $\operatorname{Ker} g$).

Z uvedeného postupu vyplývá, že celkově získáme bázi

$$\begin{aligned}
&e_1, \dots, e_{m_1},\\
&g(e_1), \dots, g(e_{m_1}), e_{m_1+1}, \dots, e_{m_2},\\
&g^2(e_1), \dots, g^2(e_{m_1}), g(e_{m_1+1}), \dots, g(e_{m_2}), e_{m_2+1}, \dots, e_{m_3},\\
&\dots\\
&g^{k-1}(e_1), \dots, g^{k-1}(e_{m_1}), g^{k-2}(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2}),\\
&\qquad g^{k-3}(e_{m_2+1}), \dots, g^{k-3}(e_{m_3}), \dots, e_{m_{k-1}+1}, \dots, e_{m_k}
\end{aligned}$$

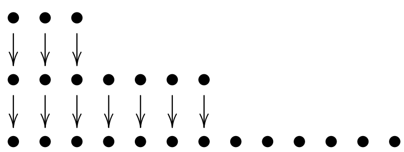
v prostoru U. Podprostory

$$\begin{aligned}
&[\![e_1, g(e_1), \dots, g^{k-1}(e_1)]\!], \dots, [\![e_{m_1}, g(e_{m_1}), \dots, g^{k-1}(e_{m_1})]\!],\\
&[\![e_{m_1+1}, g(e_{m_1+1}), \dots, g^{k-2}(e_{m_1+1})]\!], \dots, [\![e_{m_2}, g(e_{m_2}), \dots, g^{k-2}(e_{m_2})]\!],\\
&\dots\\
&[\![e_{m_{k-1}+1}]\!], \dots, [\![e_{m_k}]\!]
\end{aligned}$$

jsou pak cyklické podprostory s příslušnými cyklickými bázemi.

Označíme-li počet těchto cyklických podprostorů $r := \sum_{j=1}^{k} m_j$ a jednotlivé podprostory T_i pro $i = 1, \dots, r$, dostáváme $U = T_1 + \dots + T_r$. Jelikož $\dim T_1 + \dots + \dim T_r = \dim(T_1 + \dots + T_r)$, podle Tvrzení 11.3.3 se jedná o přímý součet podprostorů. □

Nalezli jsme cyklické podprostory a v každém z nich cyklickou bázi. Situaci můžeme znázornit diagramem, jehož vrcholy jsou vektory cyklických bází a šipky znamenají zobrazení g:



(6)

Sloupky znamenají jednotlivé cyklické podprostory. Vektory spodní řady se zobrazují na nulový vektor. Tvoří vlastně bázi v $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker}(f - \xi \operatorname{id}) = V_\xi$, což je prostor vlastních vektorů s vlastním číslem ξ. Tudíž, počet sloupků = počet cyklických podprostorů = $\dim V_\xi$.

Vektory dolních j řádků tvoří bázi v $\operatorname{Ker} g^j$. V j-tém řádku zdola je proto právě

$$n_j = \dim \operatorname{Ker} g^j - \dim \operatorname{Ker} g^{j-1} = \sum_{i=1}^{k+1-j} m_i \tag{7}$$

bodů, kde m_i jsou koeficienty z důkazu předchozího tvrzení. Čísla $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$ jednoznačně určují délky řádků diagramu, a tím i počty cyklických podprostorů příslušných dimenzí.

Formule (7) ukazuje, že čísla $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$ závisí jen a jen na nilpotentní transformaci g a nikoliv na konkrétním postupu, kterým byly získány jednotlivé cyklické báze. Jsou to *invarianty lineární transformace g*.

Důsledek. *Buď $g\colon U \to U$ nilpotentní transformace. Pak existuje báze prostoru U taková, že*

(1) transformace g má blokově diagonální matici, která je přímým součtem Jordanových bloků $J_s(0)$;

(2) transformace $f = g + \xi \operatorname{id}$ má blokově diagonální matici, která je přímým součtem Jordanových bloků $J_s(\xi)$.

Důkaz. Báze sestavená z cyklických bází cyklických podprostorů v důkazu předchozího tvrzení má požadované vlastnosti. □

Příklad. Uvažujme lineární transformaci $\mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$, $v \mapsto Av$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -4 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Anulující polynom nejmenšího stupně je $x^3+6x^2+12x+8 = (x+2)^3$, s jediným kořenem -2, což je současně jediná vlastní hodnota matice A. První rozklad má proto jediného sčítance $U = \mathbb{C}^5$ a

$$B = A + 2E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & -2 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

je nilpotentní matice, $B^3 = 0$. Spočítáme

$$B^2 = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

načež $\operatorname{Ker} B^2 = [\![(5,0,0,0,-4),(0,5,0,0,-1),(0,0,5,0,-2),(0,0,0,5,4)]\!]$. Tento čtyřrozměrný podprostor můžeme doplnit do báze v $\mathbb{C}^5$ libovolným vektorem, který v něm neleží, zvolme například

$$e_1 = (0,0,0,0,1).$$

Tím je ukončen první krok. Ve druhém kroku spočítáme

$$\operatorname{Ker} B = [\![(1,0,0,1,0),(0,-5,1,-2,-1)]\!],$$

a přidáme vektor

$$Be_1 = (0,0,3,4,2).$$

Získanou sestavu tří lineárně nezávislých vektorů je třeba doplnit do báze ve čtyřrozměrném $\operatorname{Ker} B^2$ jedním vektorem; zvolme například

$$e_2 = (0,0,0,5,4)$$

(mohli jsme zvolit kterýkoliv ze shora uvedených generátorů podprostoru $\operatorname{Ker} B^2$). Tím je ukončen druhý krok. Ve třetím kroku je $\operatorname{Ker} B^0 = \operatorname{Ker} E = 0$ a doplňujeme tedy dva vektory

$$B^2e_1 = (-5,0,0-5,0) \quad \text{a} \quad Be_2 = (-10,15,-3,-4,3)$$

do báze v dvojrozměrném $\operatorname{Ker} B$, což ovšem nevyžaduje žádný doplňující vektor a jsme hotovi.

Hledaná báze prostoru $\mathbb{C}^5$ je proto $(e_1, Be_1, B^2e_1, e_2, Be_2)$. Příslušný diagram je

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[d] & \\ \bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\ \bullet & \bullet \end{tikzcd}$$

a jeho dva sloupky odpovídají dvěma Jordanovým blokům rozměrů 3 a 2. Dostáváme blokově diagonální matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(při obráceném pořadí vektorů v cyklických bázích by jedničky stály nad diagonálou; odlišné může být i pořadí Jordanových bloků). ■

14.2.2. Druhý rozklad a Jordanův tvar matice

Vraťme se nyní k obecné transformaci $f\colon V \to V$ a prvnímu rozhladu $V = U_1 \dot{+} \cdots \dot{+} U_s$ podle některého anulujícího polynomu. Pro každý z prostorů U_l, $l = 1, \dots, s$ dostáváme rozklad na cyklické podprostory $T_{l,i}$, kde $i = 1, \dots, k_l$, celkem tedy

$$V = T_{1,1} \dot{+} \cdots \dot{+} T_{1,k_1} \dot{+} \cdots \dot{+} T_{s,1} \dot{+} \cdots \dot{+} T_{s,k_s}.$$

Definice 14.2.4. Tento rozklad se nazývá *druhý rozklad* prostoru lineární transformace.

Připomeňme, že cyklické podprostory $T_{i,j}$ jsou invariantní a zobrazení $f|_{T_{i,j}}$ mají v cyklické bázi matici tvaru $J_r(\xi)$, $r = \dim T_{i,j}$.

Definice 14.2.5. Matice, která je přímým součtem Jordanových bloků, se nazývá *matice v Jordanově tvaru.*

Příklad. Matice

$$\left(\begin{array}{ccccccc||cccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

je v Jordanově tvaru. Bloky prvního rozkladu jsou vyznačeny dvojitou čarou. Blokům druhého rozkladu odpovídají diagramy

$$\begin{array}{ccc} \bullet & & \\ \downarrow & & \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & & \\ \downarrow & \downarrow & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

Šipky zde znamenají zobrazení $f - 2\,\mathrm{id}$ resp. $f - 3\,\mathrm{id}$. Délky spodních řádků jsou dimenze prostorů vlastních vektorů s vlastními hodnotami 2 resp. 3. ■

Důsledek. *Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace. Pak existuje báze prostoru V, vzhledem k níž f má matici v Jordanově tvaru.*

Definice 14.2.6. Báze z předchozího důsledku se nazývá *Jordanova báze* a získáme ji sjednocením cyklických bází v jednotlivých cyklických podprostorech $T_{i,j}$.

Při praktickém převodu na Jordanův tvar nejdříve nalezneme invariantní podprostory $U = \operatorname{Ker} g^k = \operatorname{Ker}(f - \xi \operatorname{id})^k$ prvního rozkladu, pro každou vlastní hodnotu ξ zvlášť. V každém z nich pak hledáme cyklické podprostory a cyklické báze postupem uvedeným v důkazu Tvrzení 14.2.3.

Zbývá rozhodnout, nakolik je Jordanův tvar matice lineární transformace určen jednoznačně. Postup k nalezení Jordanovy báze, který jsme popsali, udává jednoznačně všechny Jordanovy buňky $J_r(\xi)$. Čísla ξ probíhají všechny vlastní hodnoty, rozměr r je určen prostřednictvím diagramů (6) a počet buněk s daným rozměrem je určen prostřednictvím čísel $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k$, která jsou zase jednoznačně určena formulemi (7), kde $g = f - \xi \operatorname{id}$. Neurčeno pak zůstává pouze pořadí Jordanových buněk.

Cvičení. Spočtěte Jordanův tvar transponované matice A^T. (Výsledek: je týž.)

14.2.3. Minimální polynom

Minimální polynom můžeme jednoduše stanovit z Jordanova tvaru jako polynom

$$(x - \xi_1)^{\mu_1} \cdots (x - \xi_s)^{\mu_s},$$

kde $\xi_1, \ldots, \xi_s$ jsou vlastní hodnoty lineární transformace, resp. matice a $\mu_1, \ldots, \mu_s$ jsou výšky (maximální délky sloupků) diagramů (6) pro jednotlivé vlastní hodnoty $\xi_1, \ldots, \xi_s$. (Dokažte jako cvičení.)

Příklad. Matice z posledního příkladu má minimální polynom $(x-2)^3(x-3)^2$. ■

14.3. Jordanův tvar matice a kritérium podobnosti matic

Připomeňme, že dvě čtvercové matice A, B jsou podobné, jestliže existuje invertibilní matice Q taková, že $B = QAQ^{-1}$. Zapisujeme $A \approx B$. Dále připomeňme, že matice jedné a téže lineární transformace v různých bázích jsou si podobné (maticí Q je v tomto případě matice přechodu mezi bázemi).

Tvrzení 14.3.1. *Každá čtvercová komplexní matice je podobná matici v Jordanově tvaru.*

Důkaz. Buď A čtvercová komplexní matice typu $n \times n$. Potom A je maticí lineární transformace $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $u \mapsto Au$. V Jordanově bázi má transformace f matici B v Jordanově tvaru. Pak $B \approx A$. □

Definice 14.3.1. Matice B z předchozího důkazu se nazývá *Jordanův tvar matice A.*

Jordanův tvar je určen jednoznačně až na pořadí bloků a rozhoduje o podobnosti matic:

Tvrzení 14.3.2. *Matice jsou si podobné právě tehdy, když mají stejný Jordanův tvar až na pořadí Jordanových bloků.*

Důkaz. Jsou-li si matice A', A'' podobné, pak zobrazení $u \mapsto A'u$, $u \mapsto A''u$ mají stejné charakteristické polynomy, stejné vlastní hodnoty a stejné jsou i dimenze a počty invariantních podprostrorů určené diagramy (6) a formulemi (7) (cvičení). Proto jsou stejné i Jordanovy tvary.

Naopak, buďte $B' \approx A'$ a $B'' \approx A''$ Jordanovy tvary matic A' a A''. Jestliže se B' a B'' liší jen pořadím Jordanových bloků, pak jsou si podobné (cvičení), načež $A' \approx B' \approx B'' \approx A''$. □

Cvičení. Dokažte, že pro libovolnou čtvercovou matici platí $A \approx A^{\mathsf{T}}$.
Návod: Dokažte postupně

(i) $J \approx J^{\mathsf{T}}$ pro libovolnou Jordanovu matici J (stačí zpřeházet vektory v Jordanově bázi);

(ii) je-li $A \approx J$, pak $A^{\mathsf{T}} \approx J^{\mathsf{T}}$.