8. přednáška, 19. 4. 2022

13.2. Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů

Tvrzení 13.2.1. *Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace. Potom*

(1) skalár λ je vlastní hodnota transformace f právě tehdy, když $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ není injektivní;

(2) množina všech vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě λ transformace f je podprostor prostoru V.

Důkaz. Buďte $v \in V$ a λ skalár. Následující vztahy jsou ekvivalentní:

$$\begin{aligned} f(v) &= \lambda v \\ f(v) - \lambda v &= 0 \\ f(v) - (\lambda\,\mathrm{id}_V)(v) &= 0 \\ (f - \lambda\,\mathrm{id}_V)(v) &= 0 \\ v &\in \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V) \end{aligned}$$

Takže λ je vlastní hodnota právě tehdy, když v $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)$ existuje nenulový vektor, což podle Tvrzení 12.2.2 je právě tehdy, když $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ není injektivní.

Z uvedeného navíc vyplývá, že množina všech vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě λ transformace f je $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)$, což je podprostor prostoru V. □

Obdobné trvrzení platí i pro vlastní hodnoty a vlastní vektory matice.

Tvrzení 13.2.2. *Buď A čtvercová matice typu $n \times n$ nad polem P. Potom*

(1) skalár λ je vlastní hodnota matice A právě tehdy, když $\det(A - \lambda E_n) = 0$;

(2) množina všech vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě λ matice A je podprostor prostoru P^n.

Důkaz. Buďte $x \in P^n$ a λ skalár. Následující vztahy jsou ekvivalentní:

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ Ax - \lambda x &= 0 \\ Ax - \lambda E_n x &= 0 \\ (A - \lambda E_n)x &= 0 \\ x &\in \mathrm{Ker}(A - \lambda E_n) \end{aligned}$$

Takže λ je vlastní hodnota právě tehdy, když v $\mathrm{Ker}(A - \lambda E_n)$ existuje nenulový vektor, tedy homogenní soustava $(A - \lambda E_n)x = 0$ má nenulové řešení, a to má právě tehdy, když $\det(A - \lambda E_n) = 0$, čili matice $A - \lambda E_n$ je singulární.

Z uvedeného navíc vyplývá, že množina všech vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě λ matice A je množina všech řešení homogenní soustavy rovnic o n neznámých, což je podprostor prostoru P^n. □

Tvrzení 13.2.3. *Buď A čtvercová matice typu $n \times n$ nad polem P. Potom $\det(A - \lambda E_n)$ je polynom neurčité λ stupně n s koeficienty z pole P.*

Důkaz. Cvičení. □

Tvrzení 13.2.4. *Čtvercová matice typu $n \times n$ má nejvýše n vlastních hodnot.*

Důkaz. Vlastní hodnoty jsou kořeny polynomu $\det(A - \lambda E_n)$ stupně n a polynom stupně n má nejvýše n kořenů. □

Definice 13.2.1. Buď A čtvercová matice. Polynom

$$\chi_A = \det(A - \lambda E)$$

se nazývá *charakteristický polynom* matice A a rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

se nazývá *charakteristická rovnice* matice A.

Cvičení. Buď $\chi_A = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0$ charakteristický polynom matice A typu $n \times n$. Ukažte, že $c_n = (-1)^n$, $c_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$ a $c_0 = \det A$. ▷

Podle Tvrzení 13.2.2 je λ vlastní hodnota matice A právě tehdy, když je kořenem příslušného charakteristického polynomu. Vlastní vektory příslušné vlastní hodnotě λ získáme jako řešení soustavy lineárních rovnic $(A - \lambda E)x = 0$.

Pro lineární zobrazení $f\colon U \to V$, bázi $u = (u_1, \dots, u_n)$ prostoru U a bázi $v = (v_1, \dots, v_m)$ prostoru V máme definovánu matici zobrazení f vzhledem k bázím u a v. Jedná-li se o lineární transformaci f, tedy $U = V$, a stejné báze, tedy $u = v$, budeme příslušnou matici stručněji nazývat *matice lineární transformace f vzhledem k bázi v.*

Vlastní hodnoty lineární transformace můžeme hledat jako vlastní hodnoty matice transformace.

Tvrzení 13.2.5. *Buďte V konečněrozměrný vektorový prostor nad polem P, $f\colon V \to V$ lineární transformace a A matice transformace f vzhledem k nějaké bázi prostoru V. Potom $\lambda \in P$ je vlastní hodnota transformace f právě tehdy, když λ je vlastní hodnota matice A.*

Důkaz. Tvrzení vyplývá z toho, že vektorům z V jsou jednoznačně přiřazeny jejich souřadnice (zobrazení přiřazující vektorům jejich souřadnice je izomorfismus), transformace f je určena svou maticí A a souřadnice obrazu $f(v)$ vektoru v o souřadnicích x jsou rovny součinu matic Ax, vše vzhledem k jedné bázi. □

Vlastní hodnoty lineární transformace f tedy získáváme jako vlastní hodnoty matice A transformace f vzhledem k nějaké bázi, tedy jako kořeny charakteristického polynomu matice A. Při volbě jiné báze dostaneme jinou matici A' transformace f, jejíž vztah k A je $A' = QAQ^{-1}$, kde Q je matice přechodu mezi bázemi. Je otázkou, zda matice A a A' mají stejné charakteristické polynomy a tedy stejné vlastní hodnoty.

Definice 13.2.2. Buďte A, B čtvercové matice. Matice B je *podobná* matici A, jestliže existuje invertibilní matice Q taková, že $B = QAQ^{-1}$. Zapisujeme $B \approx A$.

Zobrazení $A \mapsto QAQ^{-1}$ se nazývá *podobnostní transformace.*

Cvičení. Dokažte, že relace $\approx$ je relace ekvivalence. ▷

Tvrzení 13.2.6. *Podobné matice mají stejné charakteristické polynomy.*

Důkaz. Nechť $B = QAQ^{-1}$. Potom

$$\begin{aligned}\chi_B &= \det(B - \lambda E) = \det(QAQ^{-1} - \lambda E) = \det(QAQ^{-1} - Q\lambda EQ^{-1}) = \\ &= \det(Q(A - \lambda E)Q^{-1}) = \det Q \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det Q^{-1} = \\ &= \det Q \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \frac{1}{\det Q} = \det(A - \lambda E) = \chi_A.\end{aligned}$$ □

Díky předchozímu tvrzení můžeme pomocí charakteristického polynomu matice definovat charakteristický polynom lineární transformace konečněrozměrného prostoru.

Definice 13.2.3. Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace konečněrozměrného vektorového prostoru V. *Charakteristický polynom* χ_f transformace f je roven charakteristickému polynomu χ_A matice A transformace f vzhledem k libovolné bázi.

Díky Tvrzení 13.2.6 je předchozí definice korektní a kořeny charakteristického polynomu transformace f jsou všechny vlastní hodnoty transformace f.

Tvrzení 13.2.7. *Lineární transformace n-rozměrného vektorového prostoru má nejvýše n vlastních hodnot.*

Důkaz. Charakteristický polynom je stupně n a má tedy nejvýše n kořenů. □

13.3. Diagonalizovatelné transformace

Definice 13.3.1. Lineární transformace konečněrozměrného prostoru je *diagonalizovatelná*, jestliže má vzhledem k nějaké bázi diagonální matici.

Tvrzení 13.3.1. *Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace konečněrozměrného vektorového prostoru V, $(v_1, \dots, v_n)$ báze prostoru V a A matice transformace f vzhledem k uvedené bázi. Potom*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

právě tehdy, když $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní hodnoty transformace f a pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ vektor v_i je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_i.

Důkaz. Cvičení. □

Důsledek. *Lineární transformace konečněrozměrného prostoru je diagonalizovatelná právě tehdy, když existuje báze prostoru tvořená vlastními vektory transformace.*

Definice 13.3.2. Matice je *diagonalizovatelná*, jestliže je podobná diagonální matici.

Tvrzení 13.3.2. *Čtvercová matice A typu $n \times n$ nad polem P je diagonalizovatelná právě tehdy, když existuje báze prostoru P^n tvořená vlastními vektory matice A.*

Důkaz. □

Tvrzení 13.3.3. *Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace n-rozměrného vektorového prostoru V, $(v_1, \dots, v_n)$ báze prostoru V a A matice transformace f vzhledem k uvedené bázi. Potom transformace f je diagonalizovatelná právě tehdy, když matice A je diagonalizovatelná.*

Důkaz. □

Tvrzení 13.3.4. *Buďte $v_1, \dots, v_n$ nenulové vlastní vektory příslušné po řadě různým vlastním hodnotám $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nějaké lineární transformace. Potom množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá.*

Důkaz. □

Důsledek. *Má-li lineární transformace n-rozměrného prostoru n různých vlastních hodnot, potom je diagonalizovatelná.*

Důsledek. *Má-li čtvercová matice typu $n \times n$ n různých vlastních hodnot, potom je diagonalizovatelná.*

Příklad. Mějme $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + y, 3x + 4y)$ (ověřte, že f je lineární) a na $\mathbb{R}^2$ uvažujme kanonickou bázi.

Matici zobrazení získáme tak, že do sloupků budeme psát souřadnice obrazů vektorů báze (v tomto případě souřadnice jsou stejné jako vektory).

Obrazy bázových vektorů jsou $f(1,0) = (2,3)$, $f(0,1) = (1,4)$, takže matice zobrazení f je

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$$

a jeho kořeny, tedy vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$.

Podle předchozích tvrzení je matice A podobná matici

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektory získáme jako řešení soustavy lineárních rovnic $(A - \lambda E)x = 0$ pro jednotlivé vlastní hodnoty.

Pro $\lambda_1 = 1$ řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{tedy} \qquad \begin{aligned} x + y &= 0 \\ 3x + 3y &= 0 \end{aligned}.$$

Množina všech řešení této soustavy je $[\![(1,-1)]\!]$ a příslušné vlastní vektory jsou tedy všechny skalární násobky vektoru $v_1 = (1,-1)$. Vektor v_1 se skutečně zobrazí na svůj 1-násobek, $f(1,-1) = (1,-1)$.

Pro $\lambda_2 = 5$ řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{tedy} \qquad \begin{aligned} -3x + y &= 0 \\ 3x - y &= 0 \end{aligned}.$$

Množina všech řešení této soustavy je $[\![(1,3)]\!]$ a příslušné vlastní vektory jsou tedy všechny skalární násobky vektoru $v_2 = (1,3)$. Vektor v_2 se skutečně zobrazí na svůj 5-násobek, $f(1,3) = (5,15)$.

Podle Tvrzení 13.3.4 vektory v_1, v_2 tvoří „novou“ bázi prostoru $\mathbb{R}^2$.

Matice přechodu Q od kanonické báze k nové bázi (ve sloupcích jsou nové souřadnice vektorů kanonické báze) a matice k ní inverzní Q^{-1}, tedy matice přechodu od nové báze ke kanonické bázi (ve sloupcích jsou kanonické souřadnice vektorů nové báze) jsou

$$Q = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

A skutečně

$$A' = Q \cdot A \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Při hledání vlastních vektorů tedy hledáme jádra lineárních transformací $f - \lambda \cdot \mathrm{id}$ pro jednotlivé hodnoty λ.

Pro $\lambda_1 = 1$ je $(f - \mathrm{id})(x,y) = (x + y, 3x + 3y)$ a jádro tohoto zobrazení je

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = [\![(1,-1)]\!].$$

Pro $\lambda_2 = 5$ je $(f - 5\,\mathrm{id})(x,y) = (-3x + y, 3x - y)$ a jádro tohoto zobrazení je

$$\mathrm{Ker}(f - 5\,\mathrm{id}) = [\![(1,3)]\!].$$

■

14. Jordanův kanonický tvar

Úmluva. V této kapitole V je vektorový prostor (obvykle konečněrozměrný) nad polem P a $f\colon V \to V$ je lineární transformace.

14.1. První rozklad lineární transformace

14.1.1. Anulující polynom

Definice 14.1.1. Nechť $p \in P[x]$, $p \neq 0$. p je *anulující polynom* čtvercové matice A (resp. lineární transformace f), jestliže $p(A) = 0$ (resp. $p(f) = 0$).

Tvrzení 14.1.1 (Cayleyho-Hamiltonova věta)**.** *Charakteristický polynom čtvercové matice je jejím anulujícím polynomem.*

Důkaz. Pro libovolnou čtvercovou matici B jsme v zimním semestru odvodili vztah $B \cdot \operatorname{adj} B = \det B \cdot E$. Dosaďme za B matici $A - xE$:

$$(A - xE) \cdot \operatorname{adj}(A - xE) = \chi_A(x) \cdot E. \tag{4}$$

Je-li matice A typu $n \times n$, pak její charakteristický polynom χ_A je polynomem stupně n, řekněme $\chi_A = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0$. Dále je (z definice adjungované matice) jasné, že prvky matice $\operatorname{adj}(A - xE)$ jsou polynomy stupně $n-1$ v x. Sdružíme-li sčítance s týmiž mocninami x, získáme vyjádření $\operatorname{adj}(A - xE) = C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1 x + C_0$, kde C_i jsou čtvercové matice typu $n \times n$.

Po dosazení do (4) máme

$$(A - xE) \cdot (C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_1 x + C_0) = (c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0) \cdot E,$$

tj.

$$\begin{aligned} &- C_{n-1}x^n + (AC_{n-1} - C_{n-2})x^{n-1} + \cdots + (AC_1 - C_0)x + AC_0 \\ &\quad = c_n E x^n + \cdots + c_1 E x + c_0 E. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x obdržíme

$$\begin{aligned} &- C_{n-1} = c_n E, \\ &- C_{n-2} + AC_{n-1} = c_{n-1}E, \\ &\quad\vdots \\ &- C_0 + AC_1 = c_1 E, \\ &AC_0 = c_0 E. \end{aligned}$$

Vynásobíme-li i-tou rovnost $(n+1-i)$-tou mocninou A^{n+1-i} matice A a vzniklé rovnosti sečteme, získáme

$$0 = c_n A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 E,$$

což se mělo dokázat. □

Důsledek. *Charakteristický polynom lineární transformace je jejím anulujícím polynomem.*