

11.3. Příímý součet podprostorů

Definice 11.3.1. Buď V vektorový prostor nad polem P , buďte U_1, \dots, U_n podprostory V . Součet $U_1 + \dots + U_n$ se nazývá *příímý*, jestliže každý vektor $v \in U_1 + \dots + U_n$ lze zapsat *právě jedním způsobem* jako součet $v = u_1 + \dots + u_n$, kde $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$. Příímý součet zapisujeme s tečkami: $U_1 \dot{+} \dots \dot{+} U_n$.

Příklad. Nechtě $U_1 = \{(x, 0, 0) \mid x \in P\}$, $U_2 = \{(0, y, 0) \mid y \in P\}$, $U_3 = \{(0, 0, z) \mid z \in P\}$. Pak $P^3 = U_1 \dot{+} U_2 \dot{+} U_3$, protože libovolný vektor $u = (x, y, z) \in P^3$ má jediné vyjádření ve tvaru součtu $u = u_1 + u_2 + u_3$, kde $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, u_3 \in U_3$, a sice $(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)$. ■

Tvrzení 11.3.1. Buďte U_1, U_2 podprostory V . Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (i) $V = U_1 \dot{+} U_2$;
- (ii) $V = U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2 = 0$.

Důkaz. (i) \Rightarrow (ii): Je-li $V = U_1 \dot{+} U_2$, pak každý vektor $v \in V$ lze vyjádřit jako součet $v = u_1 + u_2$, kde $u_1 \in U_1$ a $u_2 \in U_2$, čili $V = U_1 + U_2$. Ukažme, že $U_1 \cap U_2 = 0$. Buď $v \in U_1 \cap U_2$. Pak máme dva rozklady vektoru v na sčítance z U_1 a U_2 , a sice $v = 0 + v$ a $v = v + 0$. Totožnost obou rozkladů znamená, že $v = 0$.

(ii) \Rightarrow (i): Je-li $V = U_1 + U_2$, pak každý vektor $v \in V$ lze vyjádřit jako součet $v = u_1 + u_2$, kde $u_1 \in U_1$ a $u_2 \in U_2$. Dokážeme ještě jednoznačnost vektorů u_1, u_2 : Pokud je u'_1, u'_2 jiná dvojice vektorů taková, že $v = u'_1 + u'_2$, pak

$$0 = v - v = (u_1 - u'_1) + (u_2 - u'_2),$$

a tedy $u_1 - u'_1 = -(u_2 - u'_2)$. Vektor $u_1 - u'_1 \in U_1$ je roven vektoru $-(u_2 - u'_2) \in U_2$, proto leží v průniku $U_1 \cap U_2$, což je nulový prostor. Tudiž, $u_1 - u'_1 = 0$ a $u_2 - u'_2 = 0$. □

Příklad. (1) $V = V \dot{+} 0$ pro libovolný vektorový prostor V .

(2) Prostor E^3 je příímým součtem $U \dot{+} L$, je-li $U \subset E^3$ libovolná rovina procházející počátkem a $L \subset E^3$ libovolná příímka procházející počátkem a neležící v U . ■

V případě konečněrozměrných podprostorů máme jednoduché kritérium.

Tvrzení 11.3.2. Buďte U_1, U_2 podprostory konečněrozměrného vektorového prostoru V takové, že $V = U_1 + U_2$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (i) $V = U_1 \dot{+} U_2$;
- (ii) $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$.

Důkaz. (i) \Rightarrow (ii): $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

(ii) \Rightarrow (i): Nechtě $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$. Potom $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim V = 0$, čili $U_1 \cap U_2 = 0$. □

Cvičení. Buďte $V = U_1 \dot{+} U_2$, $(e_1^1, \dots, e_{m_1}^1)$ báze podprostoru U_1 , $(e_1^2, \dots, e_{m_2}^2)$ báze podprostoru U_2 . Pak $(e_1^1, \dots, e_{m_1}^1, e_1^2, \dots, e_{m_2}^2)$ je báze prostoru V . Dokažte. ▷

Cvičení. Buď $m < n$, buď $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$ báze vektorového prostoru V . Pak $V = \llbracket e_1, \dots, e_m \rrbracket \dot{+} \llbracket e_{m+1}, \dots, e_n \rrbracket$. Dokažte. ▷

Vzniká otázka, jak jednoduše rozeznat příímý součet n podprostorů při $n > 2$. Mohlo by se zdát, že prostor V je příímým součtem podprostorů U_1, \dots, U_n , jestliže je jejich součtem a podprostory U_1, \dots, U_n mají po dvou nulový průnik. Následující příímek ukazuje, že to tak není:

Příklad. Prostor E^3 není přímým součtem $L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} U$, je-li U rovina procházející počátkem a jsou-li $L_1, L_2 \subset E^3$ různé přímky procházející počátkem, neležící v rovině U .

Skutečně, součet $L_1 + L_2$ je sice přímý, ale má nenulový průnik s rovinou U . Libovolný nenulový vektor $u = l_1 + l_2$ ležící v průniku $(L_1 + L_2) \cap U$ pak má dvojí vyjádření: jako součet $l_1 + l_2 + 0$ a jako součet $0 + 0 + u$. ■

Tvrzení 11.3.3. *Buďte $U_1, \dots, U_n \subseteq V$ podprostory takové, že $V = U_1 + \dots + U_n$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (i) $V = U_1 \dot{+} U_2 \dot{+} \dots \dot{+} U_n$;
- (ii) $U_1 \cap U_2 = 0, (U_1 + U_2) \cap U_3 = 0, \dots, (U_1 + \dots + U_{n-1}) \cap U_n = 0$.

Je-li navíc prostor V konečněrozměrný, pak je s nimi ekvivalentní i podmínka

- (iii) $\dim V = \dim U_1 + \dots + \dim U_n$.

Důkaz. Cvičení. □

Jsou-li U_1, \dots, U_n podprostory nějakého vektorového prostoru V , pak mohou existovat dva různé přímé součty, $U_1 \dot{+} \dots \dot{+} U_n$ a $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$. První z nich je podprostor V , kdežto druhý není. Nicméně, tyto přímé součty jsou izomorfní, což plyne z tvrzení uvedeného později v kapitole o lineárních zobrazeních.

Příklad. Buďte $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ a $U_2 = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Potom

$$U_1 \dot{+} U_2 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \text{ je podprostor } \mathbb{R}^3,$$

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \text{ je báze } U_1 \dot{+} U_2 \text{ a}$$

$$\dim(U_1 \dot{+} U_2) = 2.$$

$$U_1 \oplus U_2 = \{((x, 0, 0), (0, y, 0)) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \text{ není podprostor } \mathbb{R}^3,$$

$$\{((1, 0, 0), (0, 0, 0)), ((0, 0, 0), (0, 1, 0))\} \text{ je báze } U_1 \oplus U_2 \text{ a}$$

$$\dim(U_1 \oplus U_2) = 2. \quad \blacksquare$$

11.4. Popis podprostorů P^n homogenními soustavami

Každý podprostor prostoru P^n je množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic.

Tvrzení 11.4.1. *Každý podprostor $U \subseteq P^n$ je množina všech řešení homogenní soustavy $Ax = 0$, kde A je vhodná matice typu $m \times n$, přičemž $m = n - \dim U$.*

Důkaz. Podprostor U je konečněrozměrný, nechť $U = \llbracket v_1, \dots, v_k \rrbracket$. Je třeba najít matici A takovou, že U je množina všech řešení soustavy $Ax = 0$. Matice A tedy musí mít n sloupků a má platit

$$Av_i = 0 \quad \text{pro každé } i = 1, \dots, k,$$

což je totéž jako

$$AV = 0,$$

kde V je matice s k sloupků v_1, \dots, v_k . Transponujeme-li na obou stranách, obdržíme ekvivalentní rovnici

$$V^T A^T = 0.$$

Řádky hledané matice A tedy můžeme získat jako nějaký fundamentální systém řešení homogenní soustavy

$$V^T a = 0, \quad \text{kde } a \text{ je } n\text{-tice (sloupek) neznámých.}$$

Označme Ξ_A , resp. Ξ_{V^T} prostor všech řešení homogenní soustavy $Ax = 0$, resp. $V^T a = 0$. Máme $v_i \in \Xi_A$, odkud $\llbracket v_1, \dots, v_k \rrbracket \subseteq \Xi_A$. Přitom platí $\dim \Xi_A = n - \text{rank } A = n - \dim \Xi_{V^T} = n - (n - \text{rank } V^T) = \text{rank } V^T = \dim \llbracket v_1, \dots, v_k \rrbracket$. Tudíž, $\Xi_A = U$. \square

Příklad. Buď $U = \llbracket (1, 0, 2) \rrbracket \subset \mathbb{R}^3$. Najdeme soustavu rovnic, jejíž množina všech řešení je právě U .

Podle důkazu předchozího tvrzení je třeba vyřešit soustavu $V^T a = 0$, tedy rovnici

$$1 \cdot a^1 + 0 \cdot a^2 + 2 \cdot a^3 = 0.$$

Neznámá a^1 je hlavní, neznámé a^2, a^3 jsou parametry. Obecné řešení tedy je

$$a^1 = -2 \cdot t^2, \quad a^2 = t^1, \quad a^3 = t^2$$

a vhodnými volbami parametrů dostaneme fundamentální systém řešení

$$(0, 1, 0), \quad (-2, 0, 1).$$

Tudíž, matice hledané homogenní soustavy je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Není obtížné najít součet podprostorů zadaných generátory, resp. průnik podprostorů zadaných homogenními soustavami rovnic:

Cvičení. $\llbracket u_1, \dots, v_i \rrbracket + \llbracket u_{i+1}, \dots, u_n \rrbracket = \llbracket u_1, \dots, v_i, u_{i+1}, \dots, u_n \rrbracket$. \triangleright

Cvičení. $\{x \mid A'x = 0\} \cap \{x \mid A''x = 0\} = \{x \mid Ax = 0\}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} A' \\ A'' \end{pmatrix}. \quad \triangleright$$

Protože zadání podprostoru generátory umíme převádět na zadání homogenní soustavou rovnic a naopak, umíme najít i součet podprostorů zadaných homogenními soustavami rovnic, resp. průnik podprostorů zadaných generátory.

12. LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

12.1. Definice, příklady

Definice 12.1.1. Buďte U, V vektorové prostory nad polem P . Zobrazení $f: U \rightarrow V$ se nazývá *lineární*, přesněji *lineární nad polem P* , nebo *homomorfismus vektorových prostorů*, jestliže pro každé vektory $u, u_1, u_2 \in U$ a každý skalár $p \in P$ platí

- (i) $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$ (aditivita)
 (ii) $f(pu) = pf(u)$. (homogenita)

Příklad. (1) Identické zobrazení $\text{id}: U \rightarrow U$, $\text{id}(a) = a$, je lineární.

(2) Nulové zobrazení $0: U \rightarrow U$, $0(a) = 0$, je lineární.

(3) Násobení skalárem $c \in P$: Zobrazení $f_c: U \rightarrow U$, $f_c(a) = ca$, je lineární. Nazývá se *homotetie*. Všimněte si, že předchozí dva příklady jsou speciální případy pro $c = 1$, resp. $c = 0$.

(4) Zobrazení $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je lineární nad \mathbb{R} právě tehdy, když existuje skalár $c \in \mathbb{R}$ takový, že $f(a) = ca$. Dokažte. Návod: Položte $c = f(1)$.

(5) Zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (3x + 2y + z, x - y)$, je lineární. Ověřte.

(6) Zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $(x, y) \mapsto (x + y, x, x - y, y)$, je lineární. Ověřte.

(7) Buď A matice typu $m \times n$ nad polem P . Necht' $f_A: P^n \rightarrow P^m$ je zobrazení takové, že $f_A(x) = Ax$ (přesněji tedy $f_A: P^{n \times 1} \rightarrow P^{m \times 1}$). Čili, obraz n -tice $x = (x^1, \dots, x^n)$ je lineární kombinace sloupků matice A s koeficienty x^1, \dots, x^n ,

$$f_A(x) = x^1 A_1^\circ + x^2 A_2^\circ + \dots + x^n A_n^\circ.$$

Potom f_A je lineární zobrazení.

(8) Zobrazení $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^*$, kde z^* je číslo komplexně sdružené k číslu $z \in \mathbb{C}$, je lineární zobrazení vektorových prostorů nad \mathbb{R} . Toto zobrazení není lineární zobrazení nad \mathbb{C} . Ověřte.

(9) Zobrazení $\operatorname{re}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto \operatorname{re} z = \frac{1}{2}(z + z^*)$ (reálná část čísla z) je lineární zobrazení vektorových prostorů nad \mathbb{R} .

(10) Je-li $U \subseteq V$ podprostor, pak vložení $\iota_U: U \rightarrow V$, $\iota_U(u) = u$, je lineární zobrazení.

(11) Otáčení. Při otáčení Eukleidovské roviny kolem pevného bodu o úhel α se všechny vektory otáčejí o týž úhel α , nezávisle na jejich umístění. Vzniká zobrazení $\phi_\alpha: E^2 \rightarrow E^2$.

Otáčení převádí součet vektorů na součet vektorů a podobně c -násobek vektoru na c -násobek vektoru. Například aditivita se velmi názorně ověří poukazem na to, že otáčením kolem vrcholu se rovnoběžník převádí v rovnoběžník a délka jeho stran a úhlopříček se přitom nemění.

Podobně otáčení kolem pevné osy v trojrozměrném Eukleidovském prostoru představuje lineární zobrazení vektorů $E^3 \rightarrow E^3$.

(12) Rotace $E^3 \rightarrow E^3$.

(13) Rovnoběžné promítání. Promítání Eukleidovského prostoru E^3 do 2-rozměrného podprostoru (průmětny) R ve zvoleném směru L je zobrazení $E^3 \rightarrow R$. Směrem se rozumí libovolný 1-rozměrný podprostor L takový, že $E^3 = L \dot{+} R$. Průmět do roviny R je sčítanec x_R v (jednoznačném) vyjádření $x = x_L + x_R$, kde $x_L \in L$ a $x_R \in R$.

Promítání $p: E^3 \rightarrow R$ je lineární zobrazení. Aditivita se projevuje v tom, že průmětem rovnoběžníka je rovnoběžník.

(14) Projekce na přímku L procházející počátkem $E^2 \rightarrow L$.

(15) Osová souměrnost podle přímky procházející počátkem, $E^2 \rightarrow E^2$ i $E^3 \rightarrow E^3$.

(16) Zobrazení $U \rightarrow P^{\dim U}$ přiřazující vektorům jejich souřadnice vzhledem ke zvolené bázi, viz Tvzení 10.4.3.

(17) Zobrazení $P^{n \times n} \rightarrow P$, $A \mapsto \operatorname{tr} A$, přiřazující matici A typu $n \times n$ nad polem P její stopu $\operatorname{tr} A = \sum_i A_i^i$ (součet prvků na diagonále).

(18) Zobrazení $P[x] \rightarrow P[x]$, kde $P[x]$ je prostor polynomů, přiřazující polynomu jeho derivaci. Derivace může být například i zobrazení $P_n[x] \rightarrow P_{n-1}[x]$, nebo zobrazení z prostoru diferencovatelných funkcí do prostoru všech funkcí.

(19) Zobrazení z prostoru všech integrovatelných funkcí na uzavřeném intervalu do \mathbb{R} přiřazující funkci její určitý integrál. ■

Cvičení. Ukažte, že lineární zobrazení $U \rightarrow V$ je homomorfismus abelovských grup $(U, +, 0, -) \rightarrow (V, +, 0, -)$. Speciálně, $f(0) = 0$, $f(-a) = -f(a)$. ▷

Cvičení. Buď $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení. Matematickou indukci ukažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $u_1, \dots, u_n \in U$ a skaláry p_1, \dots, p_n platí

$$f(p_1 u_1 + \dots + p_n u_n) = p_1 f(u_1) + \dots + p_n f(u_n),$$

tedy obraz lineární kombinace je lineární kombinace obrazů. ▷

Lineární zobrazení je jednoznačně určeno obrazem vektorů libovolné báze:

Tvrzení 12.1.1. *Budte U, V vektorové prostory nad polem P , (u_1, \dots, u_n) báze U . Pak pro každou n -tici $v_1, \dots, v_n \in V$ existuje právě jedno lineární zobrazení $f: U \rightarrow V$ takové, že $f(u_1) = v_1, \dots, f(u_n) = v_n$.*

Důkaz. Budte $v_1, \dots, v_n \in V$. Pro $u \in U$ existují $x_1, \dots, x_n \in P$ tak, že $u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$. Položme $f(u) = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$. Cvičení: ověřte, že $f(u_i) = v_i$, f je lineární a je-li f' zobrazení s těmito vlastnostmi, potom $f' = f$. \square

Tvrzení 12.1.2. *Budte $f: U \rightarrow V$ a $g: V \rightarrow W$ lineární zobrazení. Pak $g \circ f: U \rightarrow W$ je lineární zobrazení.*

Důkaz. Budte U, V, W vektorové prostory nad polem P . Pro libovolná $u_1, u_2 \in U$ máme

$$\begin{aligned} (g \circ f)(u_1 + u_2) &= g(f(u_1 + u_2)) = \\ &= g(f(u_1) + f(u_2)) = \\ &= g(f(u_1)) + g(f(u_2)) = \\ &= (g \circ f)(u_1) + (g \circ f)(u_2). \end{aligned}$$

Pro libovolné $u \in U$ a $p \in P$ máme

$$\begin{aligned} (g \circ f)(pu) &= g(f(pu)) = \\ &= g(pf(u)) = \\ &= pg(f(u)) = \\ &= p(g \circ f)(u). \end{aligned}$$

\square

12.2. Jádro a obraz

Definice 12.2.1. Bud' $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení. Označme

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{u \in U \mid f(u) = 0\}, \\ \text{Im } f &= f(U) = \{f(u) \mid u \in U\}. \end{aligned}$$

$\text{Ker } f$ se nazývá *jádro* a $\text{Im } f$ se nazývá *obraz* lineárního zobrazení f .

Tvrzení 12.2.1. *Bud' $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení. Pak*

- (1) $\text{Ker } f$ je podprostor U ,
- (2) $\text{Im } f$ je podprostor V .

Důkaz. (1) (i) $0 \in \text{Ker } f$, protože $f(0) = 0$, (ii) Nechť $a, b \in \text{Ker } f$. Pak $a + b \in \text{Ker } f$, protože $f(a + b) = f(a) + f(b) = 0 + 0 = 0$. (iii) Nechť $a \in \text{Ker } f$, $r \in P$. Pak $ra \in \text{Ker } f$, protože $f(ra) = rf(a) = r \cdot 0 = 0$.

(2) (i) $0 \in \text{Im } f$, protože $f(0) = 0$, (ii) Nechť $a, b \in \text{Im } f$, tedy existují $c, d \in U$ takové, že $f(c) = a$ a $f(d) = b$. Pak $a + b \in \text{Im } f$, protože $f(c + d) = f(c) + f(d) = a + b$. (iii) Nechť $a \in \text{Im } f$, $r \in P$, tedy existuje $b \in U$ takové, že $f(b) = a$. Pak $ra \in \text{Im } f$, protože $f(rb) = rf(b) = ra$. \square

Cvičení. (1) Pro lineární zobrazení re z příkladu (9) platí:

$$\text{Im } re = \mathbb{R}, \quad \text{Ker } re = \mathbb{R}i = \{ri \mid r \in \mathbb{R}\}.$$

(2) Při rovnoběžném promítání $p: E^3 \rightarrow E^2$ je podprostor $\text{Ker } p$ totožný se směrem promítání, kdežto $\text{Im } p = E^2$.

(3) Při otáčení $\phi_\alpha: E^2 \rightarrow E^2$ o úhel $\alpha \neq 2k\pi$ je $\text{Im } \phi_\alpha = E^2$, zatímco $\text{Ker } \phi_\alpha$ je nulový podprostor. \triangleright

Tvrzení 12.2.2. *Bud' $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení. Pak*

- (1) f je injektivní právě tehdy, když $\text{Ker } f = 0$,

(2) f je surjektivní právě tehdy, když $\text{Im } f = V$.

Důkaz. (1) Buď f injektivní, buď u libovolný prvek z $\text{Ker } f$. Pak $f(u) = 0$, ale současně $f(0) = 0$, načež z injektivnosti $u = 0$.

Naopak, nechť $\text{Ker } f = 0$ a nechť $f(a) = f(b)$. Pak $f(a - b) = f(a) - f(b) = 0$, a tedy $a - b \in \text{Ker } f$, načež $a - b = 0$, čili $a = b$.

(2) Zřejmé. □