4. přednáška, 15. 3. 2022

Buď V n-rozměrný vektorový prostor nad polem P. Buď $e = (e_1, \dots, e_n)$ nějaká báze V, nazvěme ji *stará báze*. Buď $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ jiná báze V, nazvěme ji *nová báze*. Buď $v \in V$ libovolný vektor. Souřadnice vektoru v ve staré bázi označme $x = (x^1, \dots, x^n) \in P^n$ a říkejme jim *staré souřadnice*. Souřadnice vektoru v v nové bázi označme $x' = (x'^1, \dots, x'^n) \in P^n$ a říkejme jim *nové souřadnice*. Platí tedy $v = \sum_i x^i e_i = \sum_i x'^i e'_i$. Zajímá nás vztah mezi starými a novými souřadnicemi x a x'.

Definice 10.4.2. Matice, jejíž sloupky jsou tvořeny novými souřadnicemi starých bázových vektorů, se nazývá *matice přechodu* od staré báze k nové bázi.

Tvrzení 10.4.2. *Buď $Q_{ee'}$ matice přechodu od staré báze e k nové bázi e' a buďte x a x' staré a nové souřadnice jednoho vektoru. Potom*

$$x' = Q_{ee'} \cdot x.$$

Důkaz. Buď $Q_{ee'} = (q^i_j)$ matice přechodu od staré báze e k nové bázi e' (u q^i_j horní index řádkový, dolní index je sloupkový). Tedy

$$e_i = \sum_j q^j_i e'_j.$$

Buď $v = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n \in V$. Potom

$$\begin{aligned} v &= x^1 \sum\nolimits_j q^j_1 e'_j + \dots + x^n \sum\nolimits_j q^j_n e'_j = \\ &= x^1(q^1_1 e'_1 + q^2_1 e'_2 + \dots + q^n_1 e'_n) + \dots + x^n(q^1_n e'_1 + q^2_2 e'_2 + \dots + q^n_n e'_n) = \\ &= \left(\sum\nolimits_j q^1_j x^j\right) e'_1 + \left(\sum\nolimits_j q^2_j x^j\right) e'_2 + \dots + \left(\sum\nolimits_j q^n_j x^j\right) e'_n. \end{aligned}$$

Tedy

$$x'^i = \sum_j q^i_j x^j \qquad \text{a} \qquad x' = Q_{ee'} \cdot x. \qquad \square$$

Příklad. (1) Mějme $\mathbb{R}$, starou bázi $e = (6)$ a novou bázi $e' = (1)$. Pro $v = 2$ je $x = (\frac{1}{3})$ a $x' = (2)$.

Matice přechodu od staré báze e k nové bázi e' je

$$Q_{ee'} = \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix}.$$

A skutečně

$$x' = (6) \cdot (\tfrac{1}{3}) = (2).$$

(2) Mějme $\mathbb{R}^2$, starou bázi $e = ((1, -1), (1, 1))$ a novou bázi $e' = ((0, 2), (2, 1))$. Pro $v = (2, 0)$ je $x = (1, 1)$ a $x' = (-\frac{1}{2}, 1)$.

Matice přechodu od staré báze e k nové bázi e' je

$$Q_{ee'} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

A skutečně

$$x' = Q_{ee'} \cdot x = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Tvrzení 10.4.3. *Buďte V vektorový prostor nad polem P, $e = (e_1, \dots, e_n)$ jeho báze, $u, v \in V$, $p \in P$, $x = (x^1, \dots, x^n)$ souřadnice vektoru u a $y = (y^1, \dots, y^n)$ souřadnice vektoru v. Pak $x + y = (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n)$ jsou souřadnice vektoru $u + v$ a $px = (px^1, \dots, px^n)$ jsou souřadnice vektoru pu.*

Důkaz. Cvičení. $\square$

10.5. Přímý součet vektorových prostorů

Definice 10.5.1. Buďte $V_1, \dots, V_n$ vektorové prostory nad polem P. Na kartézském součinu $V_1 \times \cdots \times V_n$ zaveďme sčítání a násobení skalárem předpisem

$$(u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n),$$
$$p(u_1, \dots, u_n) = (pu_1, \dots, pu_n)$$

pro libovolné $(u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$ a $p \in P$.

Na $V_1 \times \cdots \times V_n$ tak dostaneme strukturu vektorového prostoru nad polem P, který se značí $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ a nazývá se *přímý součet* vektorových prostorů $V_1, \dots, V_n$.

Cvičení. Ověřte, že $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ je vektorový prostor. $\triangleright$

Tvrzení 10.5.1. *Buďte $V_1, \dots, V_n$ konečněrozměrné vektorové prostory. Pak*

$$\dim(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) = \dim V_1 + \cdots + \dim V_n.$$

Důkaz. Pro každé i nechť $(e^i_1, \dots, e^i_{m_i})$ je báze V_i. Potom

$$\begin{aligned}&((e^1_1, 0, \dots, 0), \dots, (e^1_{m_1}, 0, \dots, 0),\\ &\ (0, e^2_1, 0, \dots, 0), \dots, (0, e^2_{m_2}, 0, \dots, 0),\\ &\ \dots,\\ &\ (0, \dots, 0, e^n_1), \dots, (0, \dots, 0, e^n_{m_n}))\end{aligned}$$

je báze $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ (cvičení). $\square$

Příklad. Buď $V_1 = \mathbb{R}$ a $V_2 = \mathbb{R}^2$. Potom $V_1 \times V_2$ je množina $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ uspořádaných dvojic (x, y), kde $x \in \mathbb{R}$ a $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, tedy $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \{(x, (y_1, y_2)) \mid x \in \mathbb{R}, (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2\}$. Například

$$(1, (2, 3)) + (2, (1, -1)) = (1 + 2, (2, 3) + (1, -1)) = (3, (3, 2)),$$
$$3 \cdot (2, (1, 4)) = (3 \cdot 2, 3 \cdot (1, 4)) = (6, (3, 12)).$$

Buď $e^1 = (1)$ báze $\mathbb{R}$ a buď $e^2 = (e^2_1, e^2_2) = ((1, 0), (0, 1))$ báze $\mathbb{R}^2$. Potom trojice

$$((e^1, 0), (0, e^2_1), (0, e^2_2)) = ((1, (0, 0)), (0, (1, 0)), (0, (0, 1)))$$

je báze $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$ a $\dim(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2) = 3 = \dim \mathbb{R} + \dim \mathbb{R}^2 = 1 + 2$. $\blacksquare$

11. Vektorové podprostory

11.1. Definice, příklady, základní vlastnosti

Definice 11.1.1. Buďte V vektorový prostor nad polem P a $U \subseteq V$. U je *vektorový podprostor*, jestliže platí

(i) $0 \in U$;
(ii) $u_1 + u_2 \in U$ pro každé $u_1, u_2 \in U$ (uzavřenost na sčítání);
(iii) $pu \in U$ pro každé $u \in U$ a každé $p \in P$ (uzavřenost na násobení skalárem).

Podle (iii) pro každý vektor $u \in U$ máme $-u = (-1) \cdot u \in U$, čili s každým vektorem leží v U i vektor k němu opačný. To spolu s (i) a (ii) znamená, že podprostor je podgrupa abelovské grupy $(V, +, 0, -)$.

Axiomy vektorového prostoru jsou splněny na V a tím spíše na U (cvičení). Tudíž, podobně jako u ostatních algebraických podstruktur, podprostor je sám též vektorovým prostorem.

Příklad. (1) V každém vektorovém prostoru je nulový podprostor obsahující jen nulový vektor.

(2) Každý prostor je sám svým podprostorem.

(3) $\mathbb{R}$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad polem $\mathbb{R}$ (ověřte).

(4) $\{(a, 0) | \ a \in \mathbb{R}\}$ je podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ nad polem $\mathbb{R}$ (ověřte). ■

Tvrzení 11.1.1. *Množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic o n neznámých s maticí A nad polem P je podprostor prostoru P^n s dimenzí $n - \operatorname{rank} A$.*

Důkaz. Tvrzení vyplývá z kapitoly 4.5. Každá homogenní soustava rovnic má nulové řešení, součet řešení je řešení a skalární násobek řešení je řešení. Množina všech řešení tedy má vlastnosti požadované v definici vektorového podprostoru. Navíc, fundamentální systém řešení má $n - \operatorname{rank} A$ prvků a tvoří bázi prostoru všech řešení. □

Mnoho dalších příkladů můžeme získat jako lineární obaly.

Tvrzení 11.1.2. *Buď W podmnožina vektorového prostoru V nad polem P. Pak platí:*

(1) $[\![W]\!]$ je podprostor prostoru V.
(2) Je-li U podprostor V obsahující W, pak $[\![W]\!] \subseteq U$.

Důkaz. (1) Ukážeme, že množina $[\![W]\!]$ splňuje podmínky (i)–(iii) z definice vektorového podprostoru. Podmínka (i): Pro libovolný vektor $v \in W$ je $0 = 0v \in [\![W]\!]$. Podmínka (ii): Jsou-li $u, v \in [\![W]\!]$, potom $u = x_1u_1 + \cdots + x_mu_m$ a $v = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n$ pro nějaké $x_i, y_j \in P$, $u_i, v_j \in W$ a $m, n \in \mathbb{N}$. Tedy $u + v = x_1u_1 + \cdots + x_mu_m + y_1v_1 + \cdots + y_nv_n \in [\![W]\!]$. Podmínka (iii): Cvičení.

(2) Buď $w \in [\![W]\!]$, tedy $w = x_1w_1 + \cdots + x_nw_n$ pro nějaké $x_i \in P$, $w_i \in W$ a $n \in \mathbb{N}$. Jelikož $W \subseteq U$, všechny vektory w_i jsou prvky U, a jelikož U je vektorový podprostor, tedy uzavřený na násobení skalárem a sčítání vektorů, $w \in [\![W]\!]$. □

Tudíž, $[\![W]\!]$ je nejmenší podprostor prostoru V obsahující množinu W.

Tvrzení 11.1.3. *Libovolný podprostor konečněrozměrného vektorového prostoru je konečněrozměrný.*

Důkaz. Buď V konečněrozměrný prostor, $\dim V = n$, buď $U \subset V$ podprostor. Zkonstruujeme bázi postupem, který jsme použili při doplňování lineárně nezávislé množiny vektorů do báze v důkazu druhého Důsledku Tvrzení 10.3.3.

0-tý krok: Je-li U nulový prostor, jsme hotovi (U je 0-rozměrný).

1-ní krok: Když $U \neq \{0\}$, pak existuje vektor $u_1 \in U \setminus \{0\}$. Je-li $U = [\![u_1]\!]$, pak jsme hotovi (U je 1-rozměrný).

k-tý krok: Když $U \neq [\![u_1, \dots, u_{k-1}]\!]$, pak existuje vektor $u_k \in U \setminus [\![u_1, \dots, u_{k-1}]\!]$. Je-li $U = [\![u_1, \dots, u_k]\!]$, pak jsme hotovi ($U$ je k-rozměrný).

Množina $\{u_1, \dots, u_k\}$ je lineárně nezávislá, protože žádný z jejích vektorů není lineární kombinací předchozích (podle konstrukce $u_i \notin [\![u_1, \dots, u_{i-1}]\!]$). Podle Tvrzení 10.2.5 lineárně nezávislá množina nemá více prvků než množina generátorů, takže pro nějaké $m \leq n$ dostaneme $U = [\![u_1, \dots, u_m]\!]$. □

Důsledek. *Vektorový prostor, který má nekonečněrozměrný podprostor, je nekonečněrozměrný.*

Příklad. Prostor $C^r\mathbb{R}$ všech funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spojitých se všemi derivacemi až do řádu r včetně, je nekonečněrozměrný, protože obsahuje podprostor polynomů $\mathbb{R}[x]$, který je nekonečněrozměrný. ■

Tvrzení 11.1.4. *Buď V konečněrozměrný vektorový prostor, buď U jeho podprostor. Jestliže $\dim U = \dim V$, pak $U = V$.*

Důkaz. Buď $(u_1, \dots, u_n)$ libovolná báze U. Předpokládejme, že $U \neq V$, tedy že existuje vektor $v \in V \setminus U$. V prostoru V tak máme $(n+1)$-prvkovou lineárně nezávislou množinu vektorů $\{u_1, \dots, u_n, v\}$ (žádný z nich není lineární kombinací předchozích: vektory u_i protože jsou bázové, vektor v proto, že jinak by ležel v U). Tedy $\dim V \geq n + 1 > n = \dim U$. □

Příklad. (1) Podprostory $\mathbb{R}$.

(2) Podprostory $\mathbb{R}^2$.

(3) Podprostory $\mathbb{R}^3$. ■

11.2. Průnik a součet podprostorů

Tvrzení 11.2.1. *Buďte U_1, U_2 podprostory V. Pak $U_1 \cap U_2$ je podprostor V.*

Důkaz. Ukážeme, že množina $U_1 \cap U_2$ splňuje podmínky (i)–(iii) z definice vektorového podprostoru. Podmínka (i): $0 \in U_1 \cap U_2$, protože $0 \in U_1$ a $0 \in U_2$. Podmínka (ii): Nechť $u_1, u_2 \in U_1 \cap U_2$. Pak $u_1, u_2 \in U_1$, takže $u_1 + u_2 \in U_1$, a zároveň $u_1, u_2 \in U_2$, takže $u_1 + u_2 \in U_2$. Tudíž, $u_1 + u_2 \in U_1 \cap U_2$. Podmínka (iii): Cvičení. □

Cvičení. Průnik libovolného systému podprostorů je podprostor. ▷

Definice 11.2.1. Buďte U_1, U_2 podprostory V. Označme

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 |\ u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}.$$

Množina $U_1 + U_2$ se nazývá *součet* podprostorů $U_1 + U_2$.

Prvky množiny $U_1 + U_2$ jsou všechny vektory $v \in V$, pro něž existuje vyjádření $v = u_1 + u_2$, kde $u_1 \in U_1$ a $u_2 \in U_2$.

Tvrzení 11.2.2. *Buďte U_1, U_2 podprostory V. Pak $U_1 + U_2$ je podprostor V.*

Důkaz. Ukážeme, že množina $U_1 + U_2$ splňuje podmínky (i)–(iii) z definice vektorového podprostoru. Podmínka (i): $0 = 0 + 0 \in U_1 + U_2$, kde $0 \in U_1$ a $0 \in U_2$. Podmínka (ii): Nechť $u, v \in U_1 + U_2$. Pak $u = u_1 + u_2$ a $v = v_1 + v_2$, kde $u_1, v_1 \in U_1$, $u_2, v_2 \in U_2$, načež $u + v = u_1 + u_2 + v_1 + v_2 = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \in U_1 + U_2$. Podmínka (iii): Cvičení. □

Cvičení. Dokažte, že (1) $U_1, U_2 \subseteq U_1 + U_2$.

(2) Je-li U podprostor ve V takový, že $U_1 \subseteq U$ a $U_2 \subseteq U$, pak $U_1 + U_2 \subseteq U$.

Návod: (1) Je-li $u_1 \in U_1$ libovolný prvek, pak $u_1 = u_1 + 0 \in U_1 + U_2$.

(2) Buď $u_1 + u_2$ obecný vektor z $U_1 + U_2$, $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$. Protože $U_1, U_2 \subseteq U$, máme $u_1, u_2 \in U$, načež $u_1 + u_2 \in U$.

Množina $S(V)$ všech podprostorů vektorového prostoru V je uspořádána inkluzí $\subseteq$. Z dokázaných tvrzení o průnicích a součtech podprostorů plyne, že množina $S(V)$ je svazově uspořádána, přičemž infimem je průnik a supremem je součet podprostorů. Tudíž, $(S(V), \cap, +)$ je svaz. Tento svaz není obecně ani distributivní, ani komplementární. $\triangleright$

Tvrzení 11.2.3. *Buďte U_1, U_2 konečněrozměrné podprostory jednoho vektorového prostoru. Pak*

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2).$$

Důkaz. Označme $\dim U_1 = n_1$, $\dim U_2 = n_2$ a $\dim(U_1 \cap U_2) = m$. Buď $\{u_1, \dots, u_m\}$ báze v $U_1 \cap U_2$. To je lineárně nezávislá množina vektorů v U_1 i v U_2 a můžeme ji tedy v obou prostorech doplnit do báze vektory $u^1_1, \dots, u^1_{n_1-m}$ resp. $u^2_1, \dots, u^2_{n_2-m}$. Ukažme, že $\{u_1, \dots, u_m, u^1_1, \dots, u^1_{n_1-m}, u^2_1, \dots, u^2_{n_2-m}\}$ je báze v $U_1 + U_2$.

Nejdříve ukážeme, že množina $\{u_1, \dots, u_m, u^1_1, \dots, u^1_{n_1-m}, u^2_1, \dots, u^2_{n_2-m}\}$ je lineárně nezávislá. Nechť

$$c_1 u_1 + \dots + c_m u_m + c^1_1 u^1_1 + \dots + c^1_{n_1-m} u^1_{n_1-m} + c^2_1 u^2_1 + \dots + c^2_{n_2-m} u^2_{n_2-m} = 0$$

pro nějaké skaláry $c_1, \dots, c_m, c^1_1, \dots, c^1_{n_1-m}, c^2_1, \dots, c^2_{n_2-m} \in P$. Pak

$$c_1 u_1 + \dots + c_m u_m + c^1_1 u^1_1 + \dots + c^1_{n_1-m} u^1_{n_1-m} = -c^2_1 u^2_1 - \dots - c^2_{n_2-m} u^2_{n_2-m},$$

kde na levé straně je prvek z U_1 a na pravé prvek z U_2, ale protože jsou si rovny, leží v $U_1 \cap U_2$, a lze je jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinace vektorů $u_1, \dots, u_m$. Vyjádřeme tak vektor na pravé straně: existují skaláry $x_1, \dots, x_m \in P$ takové, že

$$x_1 u_1 + \dots + x_m u_m = -c^2_1 u^2_1 - \dots - c^2_{n_2-m} u^2_{n_2-m}.$$

Z nezávislosti množiny $\{u_1, \dots, u_m, u^2_1, \dots, u^2_{n_2-m}\}$ (je to báze v U_2) plyne, že

$$x_1 = \dots = x_m = c^2_1 = \dots = c^2_{n_2-m} = 0.$$

Odtud

$$c_1 u_1 + \dots + c_m u_m + c^1_1 u^1_1 + \dots + c^1_{n_1-m} u^1_{n_1-m} = 0,$$

a z nezávislosti množiny $\{u_1, \dots, u_m, u^1_1, \dots, u^1_{n_1-m}\}$ (je to báze v U_1) plyne, že

$$c_1 = \dots = c_m = c^1_1 = \dots = c^1_{n_1-m} = 0.$$

Všechny koeficienty $c_1, \dots, c_m, c^1_1, \dots, c^1_{n_1-m}, c^2_1, \dots, c^2_{n_2-m}$ jsou tedy nulové, takže množina $\{u_1, \dots, u_m, u^1_1, \dots, u^1_{n_1-m}, u^2_1, \dots, u^2_{n_2-m}\}$ je lineárně nezávislá.

Snadno se dokáže, že vektory $u_1, \dots, u_m, u^1_1, \dots, u^1_{n_1-m}, u^2_1, \dots, u^2_{n_2-m}$ generují $U_1 + U_2$ (cvičení).

Máme tedy bázi v $U_1 + U_2$ o $m + (n_1 - m) + (n_2 - m) = n_1 + n_2 - m$ vektorech, takže $\dim(U_1 + U_2) = n_1 + n_2 - m = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$. $\square$

Příklad. V prostoru E^3 buď $U \subset E^3$ nějaká rovina procházející počátkem a $L \subset E^3$ libovolná přímka procházející počátkem a neležící v U. Pak U je podprostor a podobně L je podprostor, přičemž evidentně $U \cap L = \{0\}$. Proto $\dim(U + L) = \dim U + \dim L - \dim(U \cap L) = 2 + 1 - 0 = 3 = \dim E^3$. Tudíž, $E^3 = U + L$ a každý vektor $v \in E^3$ je součtem $v = u + l$, kde $u \in U$ a $l \in L$. Jak najdeme vektory u, l, je-li dán vektor v? $\blacksquare$

Cvičení. Buďte U_1, U_2 podprostory ve vektorovém prostoru V, nechť $\dim U_1 + \dim U_2 > \dim V$. Ukažte, že existuje nenulový vektor $u \in U_1 \cap U_2$. $\triangleright$

Cvičení. Ukažte, že $[\![u_1, \dots, u_n]\!] + [\![v_1, \dots, v_m]\!] = [\![u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m]\!]$. ▷

Definici součtu podprostorů lze snadno rozšířit na libovolný konečný počet sčítanců:

$$U_1 + \cdots + U_n = \{u_1 + \cdots + u_n |\ u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n\}\,.$$

Vektor $v \in V$ tedy leží v $U_1 + \cdots + U_n$ právě tehdy, když jej lze zapsat jako součet $v = u_1 + \cdots + u_n$, přičemž $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$.