3. přednáška, 8. 3. 2022

Tvrzení 10.3.1. *Každý konečněrozměrný vektorový prostor má bázi.*

Důkaz. Podle definice konečněrozměrný vektorový prostor má konečnou množinu generátorů. Ukážeme, že z ní lze vybrat lineárně nezávislou podmnožinu, která generuje tentýž vektorový prostor a je tedy jeho báze. Buď $\{v_1, \dots, v_n\}$ množina generátorů vektorového prostoru. Z této množiny postupně pro $i = 1, \dots, n$ vylučme vektor v_i, je-li lineární kombinací předchozích. Tedy v_1 vyloučíme, pokud $v_1 = 0$. Vektory, které nevyloučíme, nazvěme vybrané a označme je $u_1, \dots, u_m$. Je-li prvek množiny generátorů lineární kombinací ostatních prvků této množiny, po jeho vyloučení z této množiny nám zůstane opět množina generátorů (ověřte). Proto vybrané vektory $u_1, \dots, u_m$ generují tentýž vektorový prostor.

Díky postupu při vybírání vektorů $u_1, \dots, u_m$ není žádný z nich lineární kombinací předchozích a množina $\{u_1, \dots, u_m\}$ je lineárně nezávislá. □

I nulový prostor $\{0\}$ má bázi. Je jí $\emptyset$, jelikož je lineárně nezávislá a $[\![\emptyset]\!] = \{0\}$.

Tvrzení 10.3.2. *Všechny báze jednoho konečněrozměrného vektorového prostoru mají stejný počet prvků.*

Důkaz. Buďte $(v_1, \dots, v_n)$ a $(u_1, \dots, u_m)$ báze vektorového prostoru V. Jelikož vektory $v_1, \dots, v_n$ generují V a $\{u_1, \dots, u_m\}$ je lineárně nezávislá množina, podle Tvrzení 10.2.5 $n \geq m$. Obdobně dostaneme, že $m \geq n$. Takže $n = m$. □

Definice 10.3.2. *Dimenze* vektorového prostoru je počet vektorů (libovolné) jeho báze. Vektorový prostor V dimenze n se nazývá *n-rozměrný*, zapisujeme $\dim V = n$. Nulový vektorový prostor $\{0\}$ se nazývá *0-rozměrný*.

Příklad. (1) Vektorový prostor P^n nad polem P je n-rozměrný. Jednou z bází je n-tice (*kanonická báze*) $((1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1))$.

(2) Vektorový prostor $\mathbb{C}$ nad polem $\mathbb{R}$ je dvojrozměrný. Jednou z bází je dvojice $(1, i)$. Nad polem $\mathbb{C}$ je vektorový prostor samozřejmě jednorozměrný, jednu z bází tvoří vektor 1. Vidíme, že dva vektorové prostory mohou mít *různé* dimenze, přestože mají *stejné* množiny vektorů.

(3) Vektorový prostor $\mathbb{C}^n$ nad polem $\mathbb{R}$ je $2n$-rozměrný. Jednou z bází je $2n$-tice

$$\begin{aligned}&((1,0,\dots,0),(i,0,\dots,0),\\ &\ (0,1,0,\dots,0),(0,i,0,\dots,0),\\ &\ \dots,\\ &\ (0,\dots,0,1),(0,\dots,0,i)).\end{aligned}$$

■

Definice 10.3.3. (1) *Minimální množina generátorů* vektorového prostoru V je množina vektorů, která generuje V, ale žádná její vlastní podmnožina negeneruje V.

(2) *Maximální lineárně nezávislá množina vektorů* vektorového prostoru V je lineárně nezávislá množina vektorů z V, která není vlastní podmnožinou žádné lineárně nezávislé množiny.

Tvrzení 10.3.3. *Buďte $v_1, \dots, v_n \in V$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) $\{v_1, \dots, v_n\}$ je báze V;
(2) $\{v_1, \dots, v_n\}$ je minimální množina generátorů V;
(3) $\{v_1, \dots, v_n\}$ je maximální lineárně nezávislá množina vektorů V.

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2): Je-li $\{v_1, \dots, v_n\}$ báze, je to množina generátorů a žádný z nich není lineární kombinací ostatních. Tudíž žádná její vlastní podmnožina negeneruje V a $\{v_1, \dots, v_n\}$ je minimální množina generátorů.

(2) $\Rightarrow$ (1): $\{v_1, \dots, v_n\}$ je množina generátorů. Jelikož je minimální, žádný z jejích vektorů není lineární kombinací ostatních, takže je navíc lineárně nezávislá, čili báze.

(1) $\Rightarrow$ (3): Je-li $\{v_1, \dots, v_n\}$ báze, je lineárně nezávislá a každý vektor z V je lineární kombinací vektorů báze. Tudíž přidáním jakéhokoliv vektoru bychom dostali lineárně závislou množinu a tato je tedy maximální.

(3) $\Rightarrow$ (1): Množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá. Jelikož je maximální, po přidání dalšího vektoru, dostaneme lineárně závislou množinu a ten přidaný vektor (ty původní to být nemohou) je lineární kombinací předchozích. Jelikož i každý z vektorů v_i je jejich lineární kombinací, $\{v_1, \dots, v_n\}$ je navíc množina generátorů, čili báze. $\square$

Tvrzení poskytuje dvě alternativní definice báze, které se často používají. Má také důležité důsledky.

Důsledek. *Buď V n-rozměrný vektorový prostor. Pak*

(1) libovolná jeho n-prvková lineárně nezávislá podmnožina tvoří bázi V;
(2) libovolných n jeho generátorů tvoří bázi V.

Důkaz. (1) Prostor V má n-prvkovou množinu generátorů, takže podle Tvrzení 10.2.5 každá n-prvková lineárně nezávislá podmnožina je maximální, tedy báze.

(2) V prostoru V existuje n-prvková lineárně nezávislá množina, takže podle Tvrzení 10.2.5 každá n-prvková množina generátorů je minimální, tedy báze. $\square$

Důsledek. *Buď $\{v_1, \dots, v_k\}$ lineárně nezávislá podmnožina n-rozměrného vektorového prostoru V. Pak ji lze doplnit do báze $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$.*

Důkaz. V případě, že $v_1, \dots, v_k$ generují V, tvoří bázi. Jinak existuje vektor $v_{k+1} \in V$, který není lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_k$, načež množina $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ je lineárně nezávislá, protože v_{k+1} není lineární kombinací předchozích vektorů.

Opakováním téže úvahy získáme lineárně nezávislou množinu $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}\}$. Po $n-k$ opakováních budeme mít n-prvkovou lineárně nezávislou množinu, která bude bází podle předchozího důsledku. $\square$

10.4. Souřadnice

Tvrzení 10.4.1. *Buď $(e_1, \dots, e_n)$ báze vektorového prostoru V. Pak pro každý vektor $v \in V$ existuje právě jedna n-tice skalárů $x^1, \dots, x^n \in P$ taková, že $v = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$.*

Důkaz. Buď $v \in V$. Jelikož $e_1, \dots, e_n$ generují V, existují $x^1, \dots, x^n \in P$ takové, že $v = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$. Je-li $y^1, \dots, y^n$ libovolná n-tice taková, že $v = y^1 e_1 + \dots + y^n e_n$, pak

$$\begin{aligned} 0 = v - v &= (x^1 e_1 + \dots + x^n e_n) - (y^1 e_1 + \dots + y^n e_n) = \\ &= (x^1 - y^1) e_1 + \dots + (x^n - y^n) e_n. \end{aligned}$$

Z lineární nezávislosti množiny $\{e_1, \dots, e_n\}$ plyne $x^1 - y^1 = \dots = x^n - y^n = 0$, a tedy $x^1 = y^1, \dots, x^n = y^n$. $\square$

Cvičení. Zformulujte a dokažte obrácené tvrzení. $\triangleright$

Definice 10.4.1. Skaláry $x^1, \dots, x^n$ z předchozího tvrzení se nazývají *souřadnice* vektoru v vzhledem k bázi $(e_1, \dots, e_n)$. Souřadnice budeme zapisovat buď jako prvky pole $x^1, \dots, x^n$ nebo jako uspořádanou n-tici $x = (x^1, \dots, x^n)$ nebo jako matici typu $n \times 1$

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Příklad. (1) Souřadnice vektoru $2 \in \mathbb{R}$ vzhledem k bázi (6) je $\frac{1}{3}$, protože $2 = \frac{1}{3} \cdot 6$.

(2) Souřadnice vektoru $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ v kanonické bázi jsou x, y, z, protože $(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1)$.

(3) Souřadnice vektoru $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ v bázi $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ jsou $x-y, y-z, z$, protože $(x, y, z) = (x - y) \cdot (1, 0, 0) + (y - z) \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (1, 1, 1)$.

(4) Souřadnice vektoru $z = a + bi \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ vzhledem k bázi $(1, i)$ jsou a, b, protože $z = a \cdot 1 + b \cdot i$.

Souřadnice vektoru $z = a + bi \in \mathbb{C}(\mathbb{C})$ vzhledem k bázi (1) je z, protože $z = z \cdot 1$. ■

Souřadnice vektoru závisí na volbě báze. Jeden vektor má v různých bázích různé souřadnice.