2. přednáška, 1. 3. 2022

Příklad. (1) Množina $\{7\} \subset \mathbb{R}$ je lineárně nezávislá. Je-li $x \cdot 7 = 0$ pro nějaké $x \in \mathbb{R}$, pak $x = 0$ (pro nenulové x uvedená rovnost $x \cdot 7 = 0$ neplatí).

(2) Množina $\{2, 3\} \subset \mathbb{R}$ je lineárně závislá. Lineární kombinace $x_1 \cdot 2 + x_2 \cdot 3$ může být rovna 0, ikdyž je některý z koeficientů x_1, x_2 nenulový, například $x_1 = 3, x_2 = -2$.

(3) Množina $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ je lineárně nezávislá. Lineární kombinace $x \cdot (1,0,0) + y \cdot (0,1,0) + z \cdot (0,0,1)$ je vektor (x, y, z), který je roven $(0,0,0)$ právě tehdy, když $x = y = z = 0$ (ověřte).

(4) Množina $\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ je lineárně nezávislá. Lineární kombinace $x \cdot (1,0,0) + y \cdot (1,1,0) + z \cdot (1,1,1)$ je vektor $(x + y + z, y + z, z)$, který je roven $(0,0,0)$ právě tehdy, když $x = y = z = 0$ (ověřte).

(5) Množina $\{(1,0,-1), (0,1,2), (2,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ je lineárně závislá. Lineární kombinace $x \cdot (1,0,-1) + y \cdot (0,1,2) + z \cdot (2,1,0)$ je vektor $(x + 2z, y + z, -x + 2y)$, který je roven $(0,0,0)$ i pro nenulové koeficienty x, y, z, například $x = 2, y = 1, z = -1$. Ověřte.

(6) Libovolná množina vektorů obsahující nulový vektor je lineárně závislá. Lineární kombinace $0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n + 1 \cdot 0$ je nulový vektor a přitom aspoň jeden koeficient je nenulový.

(7) Množina $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^m$, kde $v_i = (v_i^1, \ldots, v_i^m)$, je lineárně nezávislá právě tehdy, když soustava

$$\begin{aligned}
&v_1^1 x^1 + v_2^1 x^2 + \cdots + v_n^1 x^n = 0 \\
&v_1^2 x^1 + v_2^2 x^2 + \cdots + v_n^2 x^n = 0 \\
&\vdots \\
&v_1^m x^1 + v_2^m x^2 + \cdots + v_n^m x^n = 0
\end{aligned}$$

má právě jedno řešení, a to sice $x^1 = x^2 = \cdots = x^n = 0$.

(8) Množina $\{x^2, x, 1\} \subset \mathbb{R}_2[x]$ je lineárně nezávislá. Ověřte.

(9) Prázdná množina je lineárně nezávislá, protože všechny koeficienty z prázdné množiny koeficientů jsou nulové. ■

Cvičení. (1) Libovolná podmnožina lineárně nezávislé množiny vektorů je lineárně nezávislá. Dokažte.

(2) Jednoprvková monžina $\{v\} \subset V$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když $v \neq 0$. Dokažte. ▷

Tvrzení 10.2.1. *Množina vektorů $\{v_1, \ldots, v_n\}$ je lineárně závislá právě tehdy, když aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních, tj. právě když existuje index i takový, že vektor v_i je lineární kombinací vektorů $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Předpokládejme, že množina $\{v_1, \ldots, v_n\}$ je lineárně závislá, tedy že existují koeficienty $a_1, \ldots, a_n$ takové, že aspoň jeden z nich je nenulový (například a_i) a $a_1 v_1 + \ldots + a_i v_i + \ldots + a_n v_n = 0$. Potom

$$v_i = -\frac{a_1}{a_i} v_1 - \ldots - \frac{a_{i-1}}{a_i} v_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i} v_{i+1} - \ldots - \frac{a_n}{a_i} v_n,$$

a vektor v_i je tedy lineární kombinací ostatních.

„$\Leftarrow$“ Nechť vektor v_i je lineární kombinací vektorů $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$, tedy existují koeficienty $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ takové, že

$$v_i = a_1 v_1 + \ldots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \ldots + a_n v_n.$$

Potom

$$a_1v_1 + \ldots + a_{i-1}v_{i-1} - v_i + a_{i+1}v_{i+1} + \ldots + a_nv_n = 0$$

s nenulovým koeficientem (-1) u vektoru v_i. Tedy, množina $\{v_1, \ldots, v_n\}$ je lineárně závislá. □

Tvrzení 10.2.2. *Množina vektorů $\{v_1, \ldots, v_n\}$ je lineárně závislá právě tehdy, když aspoň jeden z nich je lineární kombinací předchozích, tj. právě když existuje index i takový, že vektor v_i je lineární kombinací vektorů $v_1, \ldots, v_{i-1}$.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Postupujeme jako v důkazu předchozího tvrzení, jen nenulový koeficient a_i vybereme s nejvyšším možným indexem. To znamená, že $a_{i+1} = \cdots = a_n = 0$ a zbytek je zřejmý.

Jako cvičení rozeberte podrobně případ $i = 1$, kdy bude množina předcházejících vektorů prázdná.

„$\Leftarrow$“ Tvrzení je speciálním případem předchozího. □

Definice 10.2.3. *Elementární úprava* n-tice vektorů $v_1, \ldots, v_n \in V(P)$ je:

(i) vynásobení i-tého vektoru nenulovým skalárem c;
(ii) přičtení c-násobku j-tého vektoru k i-tému;
(iii) výměna i-tého vektoru s j-tým.

Při tom vznikají po řadě n-tice

$$(v_1, \ldots, v_{i-1}, cv_i, v_{i+1}, \ldots, v_n),$$
$$(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + cv_j, v_{i+1}, \ldots, v_j, \ldots, v_n),$$
$$(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n).$$

Ke každé z těchto úprav existuje úprava inverzní, která je rovněž elementární a stejného typu (ověřte).

Definice 10.2.4. Dvě n-tice vektorů jsou *ekvivalentní*, jestliže jedna vznikne z druhé konečnou posloupností elementárních úprav.

Cvičení. Ukažte, že právě zavedená relace mezi n-ticemi vektorů je reflexivní, symetrická a tranzitivní. ▷

Příklad. Mějme matici typu $m \times n$ nad polem P. Její řádky jsou uspořádané n-tice prvků pole P, tj. vektory z prostoru P^n. Celá matice je pak m-tice takových n-tic, tedy m-ticí vektorů z prostoru P^n. Elementární úpravy této m-tice vektorů jsou právě elementární řádkové úpravy dané matice. ■

Tvrzení 10.2.3. *Nechť je n-tice $u_1, \ldots, u_n \in V$ ekvivalentní s n-ticí $v_1, \ldots, v_n \in V$. Pak vektory $u_1, \ldots, u_n$ generují V právě tehdy, když vektory $v_1, \ldots, v_n$ generují V.*

Důkaz. Nechť lze získat n-tici $v_1, \ldots, v_n$ z n-tice $u_1, \ldots, u_n$ jednou z elementárních úprav, vybereme si úpravu druhého typu, tedy $v_i = u_i + cu_j$ a $v_k = u_k$ pro $k \neq i$.

Předpokládejme, že $v_1, \ldots, v_n$ generují V. Pro libovolný vektor $w \in V$ tedy existují koeficienty $p_1, \ldots, p_n$ takové, že $w = p_1v_1 + \cdots + p_nv_n$. Pak

$$\begin{aligned} w &= p_1u_1 + \cdots + p_i(u_i + cu_j) + \cdots + p_ju_j + \cdots + p_nu_n = \\ &= p_1u_1 + \cdots + p_iu_i + \cdots + (p_j + cp_i)u_j + \cdots + p_nu_n \end{aligned}$$

je lineární kombinace vektorů $u_1, \ldots, u_n$.

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, neboť n-tice $u_1, \ldots, u_n$ vzniká z n-tice $v_1, \ldots, v_n$ inverzní úpravou, která je stejného typu.

Pro ostatní úpravy obdobně a výsledek platí i pro libovolnou konečnou posloupnost elementárních úprav. □

Tvrzení 10.2.4. *Nechť je n-tice $u_1, \dots, u_n \in V$ ekvivalentní s n-ticí $v_1, \dots, v_n \in V$. Pak množina $\{u_1, \dots, u_n\}$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá.*

Důkaz. Nechť lze získat n-tici $v_1, \dots, v_n$ z n-tice $u_1, \dots, u_n$ jednou z elementárních úprav, vybereme si úpravu druhého typu, tedy $v_i = u_i + cu_j$ a $v_k = u_k$ pro $k \neq i$.

Předpokládejme, že $\{u_1, \dots, u_n\}$ je lineárně nezávislá. Buďte $x_1, \dots, x_n \in P$ takové, že $x_1v_1 + \dots + x_nv_n = 0$. Pak

$$\begin{aligned} 0 &= x_1v_1 + \dots + x_nv_n = x_1u_1 + \dots + x_i(u_i + cu_j) + \dots + x_ju_j + \ldots + x_nu_n = \\ &= x_1u_1 + \dots + x_iu_i + \dots + (x_j + cx_i)u_j + \ldots + x_nu_n. \end{aligned}$$

Z lineární nezávislosti množiny $\{u_1, \dots, u_n\}$ vyplývá, že všechny koeficienty poslední lineární kombinace jsou nulové, tj. $x_1 = \dots = x_i = \dots = x_j + cx_i = \dots = x_n = 0$. Z toho dostaneme, že i $x_j = 0$.

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, neboť n-tice $u_1, \dots, u_n$ vzniká z n-tice $v_1, \dots, v_n$ inverzní úpravou, která je stejného typu.

Pro ostatní úpravy obdobně a výsledek platí i pro libovolnou konečnou posloupnost elementárních úprav. □

Tvrzení 10.2.5. *Nechť vektory $v_1, \dots, v_n$ generují prostor V a $\{u_1, \dots, u_m\} \subset V$ je lineárně nezávislá. Pak $m \leq n$.*

Důkaz. Každý z vektorů $u_1, \dots, u_m$ je lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_n$, takže pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ existují koeficienty $a_i^1, \dots, a_i^n$ takové, že $u_i = a_i^1v_1 + \dots + a_i^nv_n$. Matici

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & \\ a_m^1 & \dots & a_m^n \end{pmatrix}$$

upravme pomocí řádkových elementárních úprav na matici A' ve schodovitém tvaru. Provedeme-li stejné elementární úpravy s m-ticí $u_1, \dots, u_m$, dostaneme ekvivalentní m-tici $u'_1, \dots, u'_m$. Lineární kombinace vektorů $v_1, \dots, v_n$ s koeficienty z jednotlivých řádků matice A' jsou rovny právě vektorům $u'_1, \dots, u'_m$. Z lineární nezávislosti množiny $\{u_1, \dots, u_m\}$ plyne lineární nezávislost množiny $\{u'_1, \dots, u'_m\}$ a také lineární nezávislost, tedy i nenulovost řádků matice A'. Jelikož A' je ve schodovitém tvaru a všechny řádky má nenulové, nemůže mít více řádků než sloupků, tedy $m \leq n$.

Tvrzení je také součástí Tvrzení 10.2.7. □

Lemma 10.2.6 (Lemma o výměně)**.** *Buďte $v_1, \dots, v_n \in V$ a $u = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$. Pak pro každé i takové, že $a_i \neq 0$, platí $[\![v_1, \dots, v_n]\!] = [\![v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_n]\!]$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $a_1 \neq 0$ (pro jiné indexy je důkaz stejný). Potom

$$v_1 = \frac{1}{a_1}u - \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{a_1}v_i.$$

Buď $w \in [\![v_1, \dots, v_n]\!]$. Existují tedy $b_1, b_2, \dots, b_n$ takové, že

$$\begin{aligned} w &= b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_nv_n = \\ &= \frac{b_1}{a_1}u - \sum_{i=2}^{n} \frac{b_1a_i}{a_1}v_i + b_2v_2 + \dots + b_nv_n = \\ &= \frac{b_1}{a_1}u + \sum_{i=2}^{n}(b_i - b_1a_ia_1^{-1})v_i \in [\![u, v_2, \dots, v_n]\!]. \end{aligned}$$

Buď $w \in [\![u, v_2, \dots, v_n]\!]$. Existují tedy $c_1, c_2, \dots, c_n$ takové, že

$$\begin{aligned} w &= c_1 u + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = \\ &= c_1 \sum_{i=1}^{n} a_i v_i + \sum_{i=2}^{n} c_i v_i = \\ &= c_1 a_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} (c_1 a_i + c_i) v_i \in [\![v_1, \dots, v_n]\!]. \end{aligned}$$

□

Tvrzení 10.2.7 (Steinitzova věta o výměně)**.** *Nechť vektory $v_1, \dots, v_n$ generují prostor V a $\{u_1, \dots, u_m\} \subset V$ je lineárně nezávislá. Pak $m \le n$ a existují indexy $i_1, \dots, i_{n-m} \in \{1, \dots, n\}$ takové, že*

$$[\![v_1, \dots, v_n]\!] = [\![u_1, \dots, u_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-m}}]\!].$$

Důkaz. Množina $\{u_1, \dots, u_m\}$ je lineárně nezávislá, takže všechny u_i jsou nenulové. Vektor u_1 je lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_n$ s aspoň jedním nenulovým koeficientem a stejně jako v předchozím důkazu předpokládejme, že nenulový koeficient je u v_1. Z Lemmatu o výměně dostaneme $[\![v_1, v_2, \dots, v_n]\!] = [\![u_1, v_2, \dots, v_n]\!]$.

Potom vektor u_2 je lineární kombinací vektorů $u_1, v_2, \dots, v_n$ s aspoň jedním nenulovým koeficientem u vektorů $v_2, \dots, v_n$ (jinak by byla množina $\{u_1, u_2\}$ lineárně závislá). Opět pro jednoduchost předpokládejme, že nenulový koeficient je u v_2. Z Lemmatu o výměně dostaneme $[\![u_1, v_2, \dots, v_n]\!] = [\![u_1, u_2, v_3, \dots, v_n]\!]$.

Takto pokračujeme, dokud buď nepoužijeme všechny vektory $u_1, \dots, u_m$ nebo nevyměníme všechny vektory $v_1, \dots, v_n$ za vektory $u_1, \dots, u_n$. Kdyby bylo $m > n$, vektory $u_{n+1}, \dots, u_m$ by byly lineární kombinace vektorů $u_1, u_2, \dots, u_n$ ve sporu s lineární nezávislostí množiny $\{u_1, \dots, u_m\}$. Takže $m \le n$ a $[\![v_1, \dots, v_n]\!] = [\![u_1, \dots, u_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-m}}]\!]$.

□

10.3. Báze

Definice 10.3.1. *Báze* vektorového prostoru je libovolná uspořádaná lineárně nezávislá množina jeho generátorů.

Obvykle tedy budeme bázi vektorového prostoru zapisovat jako uspořádanou n-tici vektorů. Pokud nebude záležet na uspořádání vektorů v bázi, budeme ji někdy zapisovat jen jako množinu vektorů.

Příklad. (1) (6) je báze $\mathbb{R}$.

(2) $((1, 0), (0, 1))$ je báze $\mathbb{R}^2$.

(3) $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ je báze $\mathbb{R}^3$.

(4) Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ buď e_i vektor z $\mathbb{R}^n$, který má na i-tém místě jedničku a jinde nuly. Potom $(e_1, \dots, e_n)$ je báze $\mathbb{R}^n$ a nazývá se *kanonická* nebo také *standardní.*

(5) $(x^2, x, 1)$ je báze $\mathbb{R}_2[x]$. ■