

## 10. VEKTOROVÉ PROSTORY

### 10.1. Definice, příklady, základní vlastnosti

**Definice 10.1.1.** Buď  $V$  neprázdná množina,  $P$  pole. *Vektorový prostor  $V$  nad polem  $P$*  je množina  $V$  spolu s binární operací  $+$ :  $V \times V \rightarrow V$ ,  $(u, v) \mapsto u + v$ , a zobrazením  $\cdot$ :  $P \times V \rightarrow V$ ,  $(p, v) \mapsto p \cdot v$ , takovými, že

- (1) pro každé  $u, v, w \in V$  platí  $(u + v) + w = u + (v + w)$ ,
- (2) existuje  $0 \in V$  takový, že pro každé  $v \in V$  platí  $v + 0 = v$ ,
- (3) pro každé  $v \in V$  existuje  $-v \in V$  takové, že  $v + (-v) = 0$ ,
- (4) pro každé  $u, v \in V$  platí  $u + v = v + u$ ,
- (5) pro každé  $v \in V$  platí  $1 \cdot v = v$ ,
- (6) pro každé  $p, q \in P$  a  $v \in V$  platí  $(p \cdot q) \cdot v = p \cdot (q \cdot v)$ ,
- (7) pro každé  $p, q \in P$  a  $v \in V$  platí  $(p + q) \cdot v = (p \cdot v) + (q \cdot v)$ ,
- (8) pro každé  $p \in P$  a  $u, v \in V$  platí  $p \cdot (u + v) = (p \cdot u) + (p \cdot v)$ .

Prvky množiny  $V$  jsou *vektory*, prvky pole  $P$  jsou *skaláry*. Binární operace  $+$  se nazývá *sčítání*, zobrazení  $\cdot$  se nazývá *násobení skalárem*, prvek  $0 \in V$  je *nulový vektor* nebo *nula*, prvek  $-v$  se nazývá *opačný* k prvku  $v$ .

Podmínky (1)–(8) se nazývají *axiomy vektorového prostoru*. První čtyři znamenají, že  $V$  s operací  $+$  je komutativní grupa.

Při násobení vektoru skalárem píšeme skalár vždy vlevo od vektoru. Vektorový prostor nad polem  $\mathbb{R}$ , resp.  $\mathbb{C}$  se nazývá *reálný*, resp. *komplexní* vektorový prostor.

Zobrazení  $\cdot$ :  $P \times V \rightarrow V$ ,  $(p, v) \mapsto p \cdot v$ , není binární operace (není-li  $P = V$ ). Toto zobrazení se obvykle nazývá *vnější operace* (binární operace se pak může nazývat *vnitřní operace*). Na vektorovém prostoru tak máme vnitřní operaci sčítání a vnější operaci násobení skalárem.

Vektorový prostor  $V$  nad polem  $P$  se také označuje  $V(P)$ .

**Příklad.** (1) Reálný vektorový prostor Eukleidovské geometrie, dvojrozměrné i trojrozměrné. Vektor je reprezentován orientovanou úsečkou nebo uspořádanou dvojicí bodů (počáteční bod, koncový bod). Dvě takové reprezentace považujeme za totožné, lze-li jednu převést na druhou rovnoběžným posunutím. *Umístění* vektoru v daném bodě  $X$  dostaneme rovnoběžným posunutím, při kterém počáteční bod vektoru splyne s  $X$ . (Cvičení: Vektor je třída jisté relace ekvivalence. Které?)

Součet vektorů získáme pravidlem rovnoběžníka,  $p$ -násobek vektoru  $p$ -násobným prodloužením úsečky (případně se změnou orientace, když  $p < 0$ ). Nulový vektor je degenerovaná úsečka nulové délky. Vektorový prostor vektorů v rovině resp. prostoru označíme  $E^2$  resp.  $E^3$ .

(2) Buď  $V$  jednoprvková množina,  $P$  pole. Jediný prvek množiny  $V$  označme  $0$  a položme  $0 + 0 = 0$ ,  $-0 = 0$  a  $p \cdot 0 = 0$  pro každé  $p \in P$ . Dostáváme vektorový prostor nazývaný *nulový prostor* nebo také *triviální prostor*.

(3) Každé pole je vektorový prostor nad sebou samým. Položíme-li v definici vektorového prostoru  $V = P$ , budou všechny axiomy vektorového prostoru důsledky axiomů pole (ověřte). Získáváme tak například vektorový prostor  $\mathbb{R}$  nad  $\mathbb{R}$ , vektorový prostor  $\mathbb{C}$  nad  $\mathbb{C}$ , vektorový prostor  $\mathbb{Q}$  nad  $\mathbb{Q}$  a vektorový prostor  $\mathbb{Z}_2$  nad  $\mathbb{Z}_2$ .

(4) Každé pole je vektorový prostor nad libovolným svým podpolem. Jediný rozdíl oproti předchozímu příkladu spočívá v tom, že násobení skalárem je dovoleno jen pro skaláry z podpole.

(5) Buď  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P$  pole. Na množině  $P^n$  všech uspořádaných  $n$ -tic prvků  $P$  zavedme sčítání a násobení skalárem předpisem

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n),$$

$$p(u_1, u_2, \dots, u_n) = (pu_1, pu_2, \dots, pu_n).$$

Vzniká vektorový prostor  $P^n$  nad polem  $P$  (ověřte). Například řádky a sloupky matic jsou prvky takových vektorových prostorů.

(6) Vektorový prostor  $P^n$  nad podpolem  $Q \subset P$ .

(7) Vektorový prostor matic typu  $m \times n$  nad polem  $P$  s operacemi sčítání a násobení skalárem. Značí se  $P^{m \times n}$  nebo  $\mathcal{M}_{m \times n}(P)$  (resp.  $\mathcal{M}_m(P)$  nebo  $\text{gl}(m, P)$  v případě čtvercových matic).

(8) Vektorový prostor polynomů stupně nejvýše  $n$  nad polem  $P$  s operacemi sčítání a násobení skalárem.

(9) Vektorový prostor polynomů nad polem  $P$  s operacemi sčítání a násobení skalárem.

(10) Vektorový prostor všech řešení homogenní soustavy rovnic.

(11) Buď  $X$  množina,  $P$  pole. Na množině  $P^X$  všech zobrazení  $X \rightarrow P$  zavedme sčítání a násobení skalárem předpisem

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x),$$

$$(pu)(x) = p \cdot u(x).$$

Vzniká vektorový prostor  $P^X$  nad polem  $P$  (ověřte). Speciální případy jsou množina všech funkcí z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$ , množina všech spojitých funkcí na  $\mathbb{R}$ , množina diferencovatelných funkcí na  $\mathbb{R}$ , množina všech spojitých funkcí na intervalu  $[a, b]$ . ■

**Tvrzení 10.1.1.** *Buď  $V$  vektorový prostor nad polem  $P$ . Pak pro každé  $u, v \in V$ ,  $p, q \in P$  platí*

- (i)  $0 \cdot v = 0$ ,
- (ii)  $(-1) \cdot v = -v$ ,
- (iii)  $(p - q) \cdot v = p \cdot v - q \cdot v$ ,
- (iv)  $p \cdot (u - v) = p \cdot u - p \cdot v$ ,
- (v) *Je-li  $p \cdot v = 0$ , pak buď  $p = 0$  nebo  $v = 0$ .*

*Důkaz.* Cvičení. □

## 10.2. Lineární kombinace, generátory, lineární nezávislost

**Definice 10.2.1.** Buď  $V$  vektorový prostor nad polem  $P$ .

(1) Buďte  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  a  $p_1, p_2, \dots, p_n \in P$ . *Lineární kombinace* vektorů  $v_1, v_2, \dots, v_n$  s koeficienty  $p_1, p_2, \dots, p_n$  je vektor

$$p_1v_1 + p_2v_2 + \dots + p_nv_n \in V.$$

Pro  $n = 0$  definujeme lineární kombinaci prázdné množiny vektorů jako nulový vektor  $0 \in V$ .

(2) Buď  $U \subset V$ . *Lineární obal* množiny  $U$  je množina  $[[U]]$  všech lineárních kombinací konečně mnoha vektorů množiny  $U$ . Pro  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  je

$$[[U]] = [[u_1, u_2, \dots, u_n]] = \{p_1u_1 + p_2u_2 + \dots + p_nu_n \mid p_1, p_2, \dots, p_n \in P\}.$$

Lineární obal prázdné množiny je  $[[\emptyset]] = \{0\}$ .

(3) Vektory  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  generují  $V$ , je-li každý vektor  $v \in V$  jejich lineární kombinací, to jest, jestliže pro každý vektor  $v \in V$  existují skaláry  $p_1, p_2, \dots, p_n \in P$  takové, že  $v = p_1 v_1 + p_2 v_2 + \dots + p_n v_n$ , to jest, jestliže  $\llbracket v_1, v_2, \dots, v_n \rrbracket = V$ . Potom  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  je množina generátorů prostoru  $V$ .

(4) Prostor, který má konečnou množinu generátorů, se nazývá *konečněrozměrný*.

**Příklad.** (1) Součet vektorů  $u, v$  je jejich lineární kombinace s koeficienty 1, 1. Opačný vektor  $k v$  je jeho lineární kombinace (skalární násobek) s koeficientem  $-1$ :

$$u + v = 1 \cdot u + 1 \cdot v, \quad -v = (-1) \cdot v.$$

(2) Lineární kombinace vektorů  $1, 6 \in \mathbb{R}$  s koeficienty  $3, 1 \in \mathbb{R}$  je  $3 \cdot 1 + 1 \cdot 6 = 9$ .

(3) Lineární kombinace vektorů  $(1, 2, 0), (2, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$  s koeficienty  $-3, 2 \in \mathbb{R}$  je

$$(-3) \cdot (1, 2, 0) + 2 \cdot (2, 3, 1) = (1, 0, 2). \quad \blacksquare$$

**Příklad.** (1) Prostor  $\mathbb{R}^3$  je generován vektory  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ . Skutečně, libovolný vektor  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  je jejich lineární kombinací s koeficienty  $x, y, z$ :

$$(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1).$$

(2) Prostor  $\mathbb{R}^3$  je generován vektory  $(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$ . Skutečně, libovolný vektor  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  je jejich lineární kombinací s koeficienty  $x - y, y - z, z$ :

$$(x, y, z) = (x - y) \cdot (1, 0, 0) + (y - z) \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (1, 1, 1).$$

(3) Prostor  $\mathbb{R}^3$  je generován vektory  $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (3, 4, 5)$ . Libovolný vektor  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  je jejich lineární kombinací s koeficienty  $x, y, z, 0$ :

$$(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1) + 0 \cdot (3, 4, 5).$$

V tomto případě můžeme najít dokonce nekonečně mnoho vyjádření ve tvaru lineární kombinace, pro libovolný parametr  $t \in \mathbb{R}$  platí

$$(x, y, z) = (x - 3t) \cdot (1, 0, 0) + (y - 4t) \cdot (0, 1, 0) + (z - 5t) \cdot (0, 0, 1) + t \cdot (3, 4, 5).$$

(4) Prostor  $\mathbb{R}^3$  není generován vektory  $(1, 2, 0), (3, 4, 0), (5, 6, 0)$ . Ověřte.

(5) Vektory  $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ , kde  $v_i = (v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^m)$ , generují  $\mathbb{R}^m$ , jestliže soustava

$$\begin{aligned} v_1^1 x^1 + v_2^1 x^2 + \dots + v_n^1 x^n &= v^1 \\ v_1^2 x^1 + v_2^2 x^2 + \dots + v_n^2 x^n &= v^2 \\ &\vdots \\ v_1^m x^1 + v_2^m x^2 + \dots + v_n^m x^n &= v^m \end{aligned}$$

o neznámých  $x^1, x^2, \dots, x^n$  má řešení pro každou pravou stranu  $v^1, v^2, \dots, v^m$ . Soustava je totiž ekvivalentní s podmínkou

$$x^1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^m \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \\ \vdots \\ v_2^m \end{pmatrix} + \dots + x^n \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix}.$$

(6) Prostor  $\mathbb{R}_2[x]$  polynomů neurčité  $x$  s reálnými koeficienty stupně nejvýše 2 je generován vektory  $x^2, x + 1, 1$ . Ověřte.  $\blacksquare$

**Příklad.** Vektorový prostor  $\mathbb{R}[x]$  všech polynomů s reálnými koeficienty není konečněrozměrný. Pro libovolné  $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}[x]$  existuje přirozené číslo  $m$ , které je větší než stupeň kteréhokoliv z polynomů  $p_1, \dots, p_n$ . Pak polynom  $x^m \in \mathbb{R}[x]$  není lineární kombinací polynomů  $p_1, \dots, p_n$ , takže polynomy  $p_1, \dots, p_n$  negenerují  $\mathbb{R}[x]$ .  $\blacksquare$

**Cvičení.** (1) Jestliže  $v_1, \dots, v_n$  generují  $V$  a  $v_i$  je lineární kombinací ostatních, pak  $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$  také generují  $V$ . Dokažte.

(2) Nechť každý z vektorů  $v_1, \dots, v_n$  je lineární kombinace vektorů  $u_1, \dots, u_m \in V$ . Jestliže  $v_1, \dots, v_n$  generují  $V$ , pak  $u_1, \dots, u_m$  také generují  $V$ . Dokažte.  $\triangleright$

**Definice 10.2.2.** Buď  $V$  vektorový prostor nad polem  $P$ .

(1) Množina vektorů  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$  je *lineárně nezávislá*, jestliže z rovnosti

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = 0, \text{ kde } x_1, x_2, \dots, x_n \in P,$$

plyne  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ .

(2) Množina vektorů  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$  je *lineárně závislá*, jestliže není lineárně nezávislá.

Často se zjednodušeně a nepřesně říká, že nějaké vektory jsou lineárně (ne)závislé. Myslí se tím, že příslušná množina vektorů je lineárně (ne)závislá.