5. přednáška, 26. 10. 2021

Tvrzení 3.2.3. *Pro každou čtvercovou matici A platí* $\det A^{\mathsf{T}} = \det A$.

Důkaz. Činitele v součinu $A_1^{\sigma_1} \dots A_i^{\sigma_i} \dots A_n^{\sigma_n}$ můžeme uspořádat podle vzrůstajícího řádkového indexu $A^1_{\sigma_1^{-1}} \dots A^i_{\sigma_i^{-1}} \dots A^n_{\sigma_n^{-1}}$, protože σ_i^{-1}-tý činitel v původním součinu je $A_{\sigma_i^{-1}}^{\sigma_{\sigma_i^{-1}}} = A^i_{\sigma_i^{-1}}$. Potom

$$\begin{aligned}
\det A^{\mathsf{T}} &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot (A^{\mathsf{T}})^1_{\sigma_1} \dots (A^{\mathsf{T}})^i_{\sigma_i} \dots (A^{\mathsf{T}})^n_{\sigma_n} = \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A_1^{\sigma_1} \dots A_i^{\sigma_i} \dots A_n^{\sigma_n} = \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1^{-1}} \dots A^i_{\sigma_i^{-1}} \dots A^n_{\sigma_n^{-1}} = && \text{(přeuspořádání)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma^{-1} \cdot A^1_{\sigma_1^{-1}} \dots A^i_{\sigma_i^{-1}} \dots A^n_{\sigma_n^{-1}} = && (\operatorname{sgn}\sigma^{-1} = \operatorname{sgn}\sigma) \\
&= \det A,
\end{aligned}$$

protože když σ projde všechny prvky S_n, tak σ^{-1} také. □

Tvrzení 3.2.4. *Determinant matice, která má buď dva řádky stejné nebo dva sloupky stejné, je roven nule.*

Důkaz. Buď A matice typu $n \times n$, která má i-tý řádek stejný jako j-tý ($i \neq j$), tedy $A^i_k = A^j_k$ pro každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Buď $\tau_{ij} \in S_n$ transpozice vyměňující i, j, čili $\operatorname{sgn}\tau_{ij} = -1$. Pro každou permutaci $\sigma \in S_n$ označme $\sigma' = \sigma \circ \tau_{ij}$. Pak $\operatorname{sgn}\sigma' = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\tau_{ij} = -\operatorname{sgn}\sigma$ a člen determinantu odpovídající permutaci σ' je

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sgn}\sigma' \cdot A^1_{\sigma'_1} \cdots A^i_{\sigma'_i} \cdots A^j_{\sigma'_j} \cdots A^n_{\sigma'_n} = \\
&\quad = -\operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \cdots A^i_{\sigma_j} \cdots A^j_{\sigma_i} \cdots A^n_{\sigma_n} = \\
&\quad = -\operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \cdots A^i_{\sigma_i} \cdots A^j_{\sigma_j} \cdots A^n_{\sigma_n}, \qquad (A^i_{\sigma_j} = A^j_{\sigma_j} \text{ a } A^j_{\sigma_i} = A^i_{\sigma_i})
\end{aligned}$$

a je tedy opačný k členu odpovídajícímu permutaci σ.

Množinu S_n, která má sudý počet prvků, můžeme rozložit na podmnožiny $\{\sigma, \sigma'\}$, které jsou dvouprvkové, protože $\sigma' \neq \sigma$ a $\sigma'' = \sigma$ (ověřte), a každá z nich přispívá k determinantu nulou. Takže $\det A = 0$.

Když má matice dva stejné sloupky, lze tvrzení dokázat analogicky nebo je možno použít předchozí tvrzení. □

3.2.2. Elementární úpravy

Tvrzení 3.2.5. *(1) Přičtením násobku jednoho řádku, resp. sloupku k jinému řádku, resp. sloupku se determinant nezmění.*

$$\begin{vmatrix}
A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A^i_1 + cA^j_1 & A^i_2 + cA^j_2 & \dots & A^i_n + cA^j_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A^n_1 & A^n_2 & \dots & A^n_n
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A^i_1 & A^i_2 & \dots & A^i_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
A^n_1 & A^n_2 & \dots & A^n_n
\end{vmatrix}.$$

(2) Vynásobením jednoho řádku, nebo sloupku prvkem c se determinant vynásobí prvkem c.

$$\begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ cA^i_1 & cA^i_2 & \dots & cA^i_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \dots & A^n_n \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^i_1 & A^i_2 & \dots & A^i_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \dots & A^n_n \end{vmatrix}.$$

(3) Vzájemnou výměnou dvou řádků, nebo dvou sloupků determinant změní znaménko.

$$\begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^j_1 & A^j_2 & \dots & A^j_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^i_1 & A^i_2 & \dots & A^i_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \dots & A^n_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^i_1 & A^i_2 & \dots & A^i_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^j_1 & A^j_2 & \dots & A^j_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \dots & A^n_n \end{vmatrix}.$$

Důkaz. Uvedeme pouze důkaz pro řádkové úpravy, pro sloupkové je analogický.

Buďte A čtvercová matice a B upravená matice.

(1) Nechť B vznikne z A přičtením c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku, čili $B^i_\circ = A^i_\circ + cA^j_\circ$ a ostatní řádky matice B jsou stejné jako řádky matice A. Potom

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot B^1_{\sigma_1} \dots B^i_{\sigma_i} \dots B^j_{\sigma_j} \dots B^n_{\sigma_n} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \dots (A^i_{\sigma_i} + cA^j_{\sigma_i}) \dots A^j_{\sigma_j} \dots A^n_{\sigma_n} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \dots A^i_{\sigma_i} \dots A^j_{\sigma_j} \dots A^n_{\sigma_n} + \\ &\quad + c \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \dots A^j_{\sigma_i} \dots A^j_{\sigma_j} \dots A^n_{\sigma_n}}_{\text{determinant matice, kde } i\text{-tý řádek je stený jako } j\text{-tý}} = \\ &= \det A + c \cdot 0 = \det A. \end{aligned}$$

(2) Nechť B vznikne z A vynásobením i-tého řádku prvkem c, čili $B^i_\circ = cA^i_\circ$ a ostatní řádky matice B jsou stejné jako řádky matice A. Potom

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot B^1_{\sigma_1} \dots B^i_{\sigma_i} \dots B^n_{\sigma_n} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \dots cA^i_{\sigma_i} \dots A^n_{\sigma_n} = \\ &= c \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \dots A^i_{\sigma_i} \dots A^n_{\sigma_n} = \\ &= c \det A. \end{aligned}$$

(3) Nechť B vznikne z A vzájemnou výměnou i-tého řádku a j-tého řádku, čili $B^i_\circ = A^j_\circ$, $B^j_\circ = A^i_\circ$ a ostatní řádky matice B jsou stejné jako řádky matice A. Buď $\tau_{ij} \in S_n$ transpozice vyměňující i, j, čili $\operatorname{sgn} \tau_{ij} = -1$. Pro každou permutaci $\sigma \in S_n$ označme $\sigma' = \sigma \circ \tau_{ij}$. Pak $\sigma'_i = \sigma_j$, $\sigma'_j = \sigma_i$ a $\sigma'_k = \sigma_k$ pro $k \neq i, j$ a $\operatorname{sgn} \sigma' = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \tau_{ij} = -\operatorname{sgn} \sigma$.

Potom

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot B^1_{\sigma_1}\dots B^i_{\sigma_i}\dots B^j_{\sigma_j}\dots B^n_{\sigma_n} = \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1}\dots A^j_{\sigma_i}\dots A^i_{\sigma_j}\dots A^n_{\sigma_n} = \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1}\dots A^i_{\sigma_j}\dots A^j_{\sigma_i}\dots A^n_{\sigma_n} = \qquad \text{(komutativita násobení)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma'_1}\dots A^i_{\sigma'_i}\dots A^j_{\sigma'_j}\dots A^n_{\sigma'_n} = \\ &= -\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma' \cdot A^1_{\sigma'_1}\dots A^i_{\sigma'_i}\dots A^j_{\sigma'_j}\dots A^n_{\sigma'_n} = \quad (\operatorname{sgn}\sigma^{-1} = \operatorname{sgn}\sigma) \\ &= -\det A,\end{aligned}$$

protože když σ projde všechny prvky S_n, tak σ' také. □

Cvičení. Jaký je vztah mezi $\det(cA)$ a $\det A$? ▷

Cvičení. Nechť A je matice typu $n \times n$ taková, že $A^\mathsf{T} = -A$ (taková matice se nazývá *antisymetrická*). Ukažte, že je-li n liché číslo, pak $\det A = 0$. ▷

Příklad.

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\4&4&4&8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\3&3&6&6\\4&4&4&8\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&4&4&4\\3&3&6&6\\4&4&4&8\end{vmatrix}$$

$$4\cdot\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}4&4&4&4\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&8&8&8\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&12&12\\0&0&0&4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&16\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\0&0&0&4\end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix}0&0&0&4\\0&2&2&2\\0&0&3&3\\1&1&1&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&0&0&4\\0&0&3&3\\0&2&2&2\\1&1&1&1\end{vmatrix}$$ ■

Důsledek. *Buďte Q elementární matice a A matice stejného typu. Pak*

$$\det QA = \det Q \cdot \det A.$$

Důkaz. (1) $\det(E^{i,j}(c)A) = \det A = 1 \cdot \det A = \det E^{i,j}(c) \cdot \det A$.
(2) $\det(E^i(c)A) = c \det A = \det E^i(c) \cdot \det A$.
(3) $\det(E^{i,j}A) = (-1) \cdot \det A = \det E^{i,j} \cdot \det A$. □

Cvičení. Dokažte, že $\det E^{i,j} = -1$ s využitím předchozího důsledku a toho, že vzájemná výměna dvou řádků je složením konečně mnoha řádkových elementárních úprav ostatních druhů. ▷

Tvrzení 3.2.6. *Matice je regulární právě tehdy, když má nenulový determinant.*

Důkaz. Buď A regulární matice, tedy $A = Q_1 \cdots Q_k$, kde $Q_1, \dots, Q_k$ jsou elementární matice. Potom

$$\begin{aligned}\det A &= \det(Q_1\cdots Q_k) = \det Q_1 \cdot \det(Q_2\cdots Q_k) = \dots = \\ &= \det Q_1 \cdot \det Q_2 \cdots \det Q_k,\end{aligned}$$

což není rovno nule, protože determinanty elementárních matic jsou nenulové.

Nechť $\det A \neq 0$. Pomocí řádkových elementárních úprav převedeme A na schodovitý tvar B, tedy $B = Q_k \cdots Q_1 A$, kde $Q_1, \dots, Q_k$ jsou příslušné elementární matice. Potom

$$\begin{aligned}\det B &= \det(Q_k \cdots Q_1 A) = \det Q_k \det(Q_{k-1} \cdots Q_1 A) = \cdots = \\ &= \det Q_k \det Q_{k-1} \cdots \det Q_1 \det A \neq 0.\end{aligned}$$

Jelikož B je ve schodovitém tvaru a její determinant je tedy součinem prvků na diagonále, na diagonále není žádná nula. To znamená, že B nemá nulový řádek, je tedy regulární a A také. ☐

Důsledek. *Matice je regulární právě tehdy, když má nenulový determinant, a to má právě tehdy, když je invertibilní, a to je právě tehdy, když je ekvivalentní jednotkové matici.*

Tvrzení 3.2.7 (Cauchyho věta)**.** *Buďte A, B čtvercové matice stejného typu. Pak*

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

Důkaz. (1) Je-li A regulární, tedy součin $Q_1 Q_2 \cdots Q_k$ elementárních matic, pak

$$\begin{aligned}\det AB &= \det(Q_1 \cdots Q_k B) = \det Q_1 \cdot \det(Q_2 \cdots Q_k B) = \cdots = \\ &= \det Q_1 \det Q_2 \cdots \det Q_k \det B = \det(Q_1 Q_2 \cdots Q_k) \det B = \\ &= \det A \det B.\end{aligned}$$

(2) Je-li A singulární, podle Tvrzení 2.5.5 je AB také singulární a tedy

$$\det AB = 0 = \det A = \det A \cdot \det B.$$ ☐

Cvičení. $\det A^{-1} = 1/\det A$. ▷

Lemma 3.2.8.

$$\begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_k^1 & A_{k+1}^1 & \dots & A_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^k & \dots & A_k^k & A_{k+1}^k & \dots & A_n^k \\ 0 & \dots & 0 & A_{k+1}^{k+1} & \dots & A_n^{k+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{k+1}^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1^1 & \dots & A_k^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^k & \dots & A_k^k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{k+1}^{k+1} & \dots & A_n^{k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{k+1}^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix}.$$

Determinant matice A v předchozím tvrzení se *rozpadá na subdeterminanty*: jeden subdeterminant řádu k a jeden subdeterminant řádu $n-k$. Stručně ale výstižně lze toto tvrzení vyjádřit zápisem

$$\begin{vmatrix} A' & X \\ 0 & A'' \end{vmatrix} = |A'| \cdot |A''|.$$

Příklad.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot 8 = 2 \cdot 1 \cdot 8 = 16$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 \cdot (-2) = 6$$ ■

3.2.3. Laplaceův rozvoj

Definice 3.2.3. Buď A matice typu $n \times n$. Determinant řádu $n-1$ matice vzniklé z A vynecháním jednoho řádku a jednoho sloupku se nazývá *minor*. Při vynechání i-tého řádku a j-tého sloupku příslušný minor označujeme

$$\bar{A}^i_j.$$

Kofaktor (nebo *algebraický doplněk*) prvku A^i_j je

$$\hat{A}^i_j = (-1)^{i+j}\bar{A}^i_j.$$

Tedy, kofaktor (algebraický doplněk) prvku A^i_j je $(-1)^{i+j}$-násobek determinantu matice, která vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupku.

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\bar{A}^1_1 = d, \quad \bar{A}^1_2 = c, \quad \bar{A}^2_1 = b, \quad \bar{A}^2_2 = a,$$

$$\begin{aligned} \hat{A}^1_1 &= (-1)^{1+1}\bar{A}^1_1 = d, & \hat{A}^1_2 &= (-1)^{1+2}\bar{A}^1_2 = -c, \\ \hat{A}^2_1 &= (-1)^{2+1}\bar{A}^2_1 = -b, & \hat{A}^2_2 &= (-1)^{2+2}\bar{A}^2_2 = a. \end{aligned}$$ ■

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\bar{A}^1_1 = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}, \quad \bar{A}^1_2 = \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}, \quad \bar{A}^1_3 = \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \bar{A}^3_3 = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \hat{A}^1_1 &= (-1)^{1+1}\bar{A}^1_1 = \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}, & \hat{A}^1_2 &= (-1)^{1+2}\bar{A}^1_2 = -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}, \\ \hat{A}^1_3 &= (-1)^{1+3}\bar{A}^1_3 = \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}, & \hat{A}^3_3 &= (-1)^{3+3}\bar{A}^3_3 = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}. \end{aligned}$$ ■

Tvrzení 3.2.9 (Laplaceova věta o rozvoji determinantu)**.** *Buď A matice typu $n \times n$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí*

$$\begin{aligned} \det A &= A^i_1\hat{A}^i_1 + A^i_2\hat{A}^i_2 + \cdots + A^i_n\hat{A}^i_n = \sum_{j=1}^n A^i_j\hat{A}^i_j = \\ &= A^1_i\hat{A}^1_i + A^2_i\hat{A}^2_i + \cdots + A^n_i\hat{A}^n_i = \sum_{j=1}^n A^j_i\hat{A}^j_i. \end{aligned}$$

Vztah v Laplaceově větě se nazývá *Laplaceův rozvoj podle i-tého řádku* resp. *podle i-tého sloupku.*

Důkaz.

$$\det A = \begin{vmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_{j-1} & A^1_j & A^1_{j+1} & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^i_1 & \dots & A^i_{j-1} & A^i_j & A^i_{j+1} & \dots & A^i_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_{j-1} & A^n_j & A^n_{j+1} & \dots & A^n_n \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_{j-1} & A^1_j & A^1_{j+1} & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A^i_j & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_{j-1} & A^n_j & A^n_{j+1} & \dots & A^n_n \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^n A^i_j \begin{vmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_{j-1} & A^1_j & A^1_{j+1} & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_{j-1} & A^n_j & A^n_{j+1} & \dots & A^n_n \end{vmatrix}.$$

Ukažme, že

$$\begin{vmatrix} A^1_1 & \dots & A^1_{j-1} & A^1_j & A^1_{j+1} & \dots & A^1_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & \dots & A^n_{j-1} & A^n_j & A^n_{j+1} & \dots & A^n_n \end{vmatrix} = \hat{A}^i_j.$$

Vyměňujme i-tý řádek $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ s předchozími řádky tak dlouho, až bude prvním řádkem; k tomu je potřeba $i-1$ výměn. Poté vyměňujme j-tý sloupek $\begin{pmatrix} 1 & A^1_j & \dots & A^{i-1}_j & A^{i+1}_j & \dots & A^n_j \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ s předchozími sloupky tak dlouho, až bude prvním sloupkem; k tomu je potřeba $j-1$ výměn. Takto vzniklý determinant je tedy nutné vynásobit číslem $(-1)^{i-1}(-1)^{j-1} = (-1)^{i-1+j-1} = (-1)^{i+j}$ a navíc se rozpadá na subdeterminanty $\det(1)$ a $\bar{A}^i_j$. Proto $\det A = \sum_{j=1}^n A^i_j \cdot (-1)^{i+j}\bar{A}^i_j = \sum_{j=1}^n A^i_j \hat{A}^i_j$ a máme rozvoj podle i-tého řádku.

Rozvoj podle i-tého sloupku získáme analogicky. □

Příklad.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + (-2) = 6 \quad \blacksquare$$

3.3. Adjungovaná matice

Definice 3.3.1. Buď A čtvercová matice. Označme $\hat{A}$ matici kofaktorů $\hat{A}^i_j$. Matice $\hat{A}^\mathsf{T}$ je matice *adjungovaná* k matici A a značí se $\operatorname{adj} A$. Tedy,

$$\operatorname{adj} A = \hat{A}^\mathsf{T}.$$

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\operatorname{adj} A = \hat{A}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} \hat{A}_1^1 & \hat{A}_2^1 \\ \hat{A}_1^2 & \hat{A}_2^2 \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Tvrzení 3.3.1. *Pro libovolnou čtvercovou matici A*

$$\det A \cdot E = A \cdot \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \cdot A.$$

Je-li A regulární matice, pak

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

Důkaz. V i-tém řádku a j-tém sloupku matice $A \cdot \operatorname{adj} A$ je

$$(A \cdot \operatorname{adj} A)_j^i = \sum_k A_k^i (\hat{A}^\mathsf{T})_j^k = \sum_k A_k^i \hat{A}_k^j.$$

Pro $i = j$ je $(A \cdot \operatorname{adj} A)_i^i = \sum_k A_k^i \hat{A}_k^i = \det A$ podle Laplaceovy věty.

Je-li $i \neq j$, buď B matice, která z A vznikne tím, že j-tý řádek nahradíme i-tým řádkem. Potom

$$\begin{aligned}
\sum_k A_k^i \hat{A}_k^j &= \sum_k B_k^i \hat{B}_k^j = && (B \text{ se liší od } A \text{ jen v } j\text{-tém řádku}) \\
&= \sum_k B_k^j \hat{B}_k^j = && (B_k^i = B_k^j) \\
&= \det B = && (\text{podle Laplaceovy věty}) \\
&= 0. && (B \text{ má dva stejné řádky})
\end{aligned}$$

Matice $A \cdot \operatorname{adj} A$ je tedy diagonální a všechny prvky na diagonále jsou rovny $\det A$, čili

$$A \cdot \operatorname{adj} A = \det A \cdot E.$$

Rovnost $\operatorname{adj} A \cdot A = \det A \cdot E$ dostaneme analogicky.

Je-li A regulární, pak s využitím existence A^{-1} a nenulovosti $\det A$ dostaneme uvedený vztah. $\square$

Příklad. Mějme regulární matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Potom

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Například pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

dostaneme

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$