4. přednáška, 19. 10. 2021

Tvrzení 2.5.2. *Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.*

Důkaz. Nenulové řádky matice ve schodovitém tvaru jsou lineárně nezávislé (cvičení) a přidáme-li k nim další, nulový řádek, budou lineárně závislé. □

Podle následujícího tvrzení řádkové ani sloupkové elementární úpravy nemění lineární závislost a nezávislost řádků.

Tvrzení 2.5.3. *Buďte $A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ$ řádky. Nechť $B^1_\circ, B^2_\circ, \dots, B^m_\circ$ jsou řádky, které z řádků $A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ$ vzniknou provedením jedné řádkové nebo sloupkové elementární úpravy. Potom řádky $A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když řádky $B^1_\circ, B^2_\circ, \dots, B^m_\circ$ jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. (1) Nechť došlo k přičtení c-násobku j-tého řádku k i-tému řádku, kde $i \neq j$. Tedy, $B^i_\circ = A^i_\circ + cA^j_\circ$ a $B^k_\circ = A^k_\circ$ pro $k \neq i$.

Předpokládejme, že $A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ$ jsou lineárně nezávislé. Buďte $c_1, \dots, c_m \in P$ takové, že $c_1 B^1_\circ + \dots + c_m B^m_\circ = 0_\circ$. Pak

$$\begin{aligned} 0_\circ &= c_1 B^1_\circ + \dots + c_m B^m_\circ = \\ &= c_1 A^1_\circ + \dots + c_i(A^i_\circ + cA^j_\circ) + \dots + c_j A^j_\circ + \ldots + c_m A^m_\circ = \\ &= c_1 A^1_\circ + \dots + c_i A^i_\circ + \dots + (c_j + cc_i) A^j_\circ + \ldots + c_m A^m_\circ. \end{aligned}$$

Z lineární nezávislosti řádků $A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ$ vyplývá, že všechny koeficienty poslední lineární kombinace jsou nulové, tj. $c_1 = \dots = c_i = \dots = cc_i + c_j = \dots = c_m = 0$. Z toho dostaneme, že i $c_j = 0$, a řádky $B^1_\circ, B^2_\circ, \dots, B^m_\circ$ jsou lineárně nezávislé.

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, neboť řádky $A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ$ vzniknou z řádků $B^1_\circ, B^2_\circ, \dots, B^m_\circ$ inverzní úpravou, která je stejného typu.

(2) Nechť došlo k přičtení c-násobku j-tého sloupku k i-tému sloupku, kde $i \neq j$. Pak pro každé $k \in \{1, \dots, m\}$ je $B^k_i = A^k_i + cA^k_j$ a $B^k_l = A^k_l$ pro $l \neq i$. Tedy $B^k_\circ = \begin{pmatrix} A^k_1 & \dots & A^k_i + cA^k_j & \dots & A^k_j & \dots & A^k_n \end{pmatrix}$.

Předpokládejme, že $A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ$ jsou lineárně nezávislé. Buďte $c_1, \dots, c_m \in P$ takové, že $c_1 B^1_\circ + \dots + c_m B^m_\circ = 0_\circ$. Takže

$$\begin{aligned} & c_1 B^1_\circ + \dots + c_m B^m_\circ = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_k c_k A^k_1 & \dots & \sum_k c_k (A^k_i + cA^k_j) & \dots & \sum_k c_k A^k_j & \dots & \sum_k c_k A^k_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_k c_k A^k_1 & \dots & \sum_k c_k A^k_i + c \sum_k c_k A^k_j & \dots & \sum_k c_k A^k_j & \dots & \sum_k c_k A^k_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a z toho dostaneme

$$\sum_k c_k A^k_1 = \dots = \sum_k c_k A^k_i = \dots = \sum_k c_k A^k_j = \dots = \sum_k c_k A^k_n = 0.$$

Pak

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sum_k c_k A^k_1 & \sum_k c_k A^k_2 & \dots & \sum_k c_k A^k_n \end{pmatrix} &= \sum_k c_k \begin{pmatrix} A^k_1 & A^k_2 & \dots & A^k_n \end{pmatrix} = \\ &= \sum_k c_k A^k_\circ = c_1 A^1_\circ + \dots + c_m A^m_\circ = 0_\circ \end{aligned}$$

a z lineární nezávislosti řádků $A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ$ dostaneme $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$. Řádky $B^1_\circ, B^2_\circ, \dots, B^m_\circ$ jsou tedy lineárně nezávislé.

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, neboť řádky $A^1_\circ, A^2_\circ, \dots, A^m_\circ$ vzniknou z řádků $B^1_\circ, B^2_\circ, \dots, B^m_\circ$ inverzní úpravou, která je stejného typu.

Pro ostatní úpravy je důkaz obdobný a ponecháme ho jako cvičení. □

Důsledek. *(1) Elementární úpravy nemění hodnost.*

(2) Vynásobení konečně mnoha elementárními maticemi zleva nemění hodnost.

(3) Vynásobení konečně mnoha elementárními maticemi zprava nemění hodnost.

(4) Ekvivalentní matice mají stejnou hodnost.

(5) Hodnost matice je rovna počtu nenulových řádků ekvivalentní matice ve schodovitém tvaru.

(6) Hodnost matice je rovna počtu nenulových řádků (sloupků) ekvivalentní matice v Gaussově kanonickém tvaru.

(7) Maximální počet lineárně nezávislých sloupků matice je roven maximálnímu počtu jejích lineárně nezávislých řádků, tj. hodnosti matice.

(8) $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T$.

Příklad. Spočítejme hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Takže $\operatorname{rank} A = 3$. ■

Příklad. Spočítejme hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Takže $\operatorname{rank} A = 2$. ■

Definice 2.5.4. Čtvercová matice je *regulární*, jestliže její hodnost je rovna počtu jejích řádků (tedy její řádky jsou lineárně nezávislé). Čtvercová matice je *singulární*, jestliže není regulární.

Příklad. (1) Všechny jednotkové matice jsou regulární.

(2) Všechny elementární matice jsou regulární.

(3) Všechny nulové matice jsou singulární. ■

Tvrzení 2.5.4. *Matice je regulární právě tehdy, když je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.*

Důkaz. Cvičení. □

Důsledek. *(1) Matice je invertibilní právě tehdy, když je regulární.*

(2) Regulární matice je součinem konečně mnoha elementárních matic.

(3) Součin regulárních matic je regulární matice.

(4) Vynásobení regulární maticí zleva nemění hodnost.

(5) Vynásobení regulární maticí zprava nemění hodnost.

Tvrzení 2.5.5. *Buďte A, B čtvercové matice stejného typu. Obě matice A, B jsou regulární právě tehdy, když matice AB je regulární.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Tato implikace je součástí předchozího Důsledku.

„$\Leftarrow$“ Dokážeme, že je-li aspoň jedna z matic A, B singulární, pak AB je singulární. Nechť A je singulární. Její schodovitý tvar $S = Q_k \cdots Q_1 A$, kde $Q_1 \cdots Q_k$ jsou elementární matice, má nulový řádek. Potom matice SB má také nulový řádek, je tedy singulární a řádkově ekvivalentní matice $AB = Q_1^{-1} \cdots Q_k^{-1} SB$, která má stejnou hodnost, je také singulární.

Pro B singulární je důkaz analogický a ponecháme ho jako cvičení. □

Tvrzení 2.5.6. *Buďte A matice typu $m \times n$ a B matice typu $n \times p$. Potom* $\operatorname{rank} AB \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$.

Důkaz. Matici A převedeme pomocí řádkových elementárních úprav na schodovitý tvar $S_A = Q_k \cdots Q_1 A$ a matici B převedeme pomocí sloupkových elementárních úprav na tvar $S_B = BP_1 \cdots P_l$ takový, že S_B^{T} je ve schodovitém tvaru.

Potom $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} Q_1^{-1} \cdots Q_k^{-1} S_A S_B P_l^{-1} \cdots P_1^{-1} = \operatorname{rank} S_A S_B$, přičemž matice $S_A S_B$ má minimálně tolik nulových řádků, kolik jich má matice S_A, a minimálně tolik nulových sloupků, kolik jich má matice S_B. Tedy $\operatorname{rank} S_A S_B \leq \operatorname{rank} S_A = \operatorname{rank} A$ a $\operatorname{rank} S_A S_B \leq \operatorname{rank} S_B = \operatorname{rank} B$. □

Cvičení. Co se dá říct o $\operatorname{rank}(A + B)$? ▷

3. Determinant

3.1. Permutace

Definice 3.1.1. Buď M konečná množina. *Permutace* na množině M je bijekce $M \to M$.

Buď σ permutace na množině M a $m \in M$. Obraz $\sigma(m)$ prvku m při permutaci σ se často značí σ_m.

Definice 3.1.2. *Transpozice* je permutace, při níž se vzájemně vymění dva prvky a ostatní se nezmění.

Tvrzení 3.1.1. *Každá permutace je složením konečně mnoha transpozic.*

Nechť $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Množinu všech permutací na množině I_n značíme S_n. Permutaci $\sigma \in S_n$ můžeme zapisovat jako uspořádanou n-tici obrazů prvků množiny I_n, tedy $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$.

Definice 3.1.3. Buď $\sigma \in S_n$. Nechť $i, j \in I_n$ jsou takové, že $i < j$ a $\sigma_i > \sigma_j$. Pak dvojice (σ_i, σ_j) tvoří *inverzi* permutace σ.

Počet inverzí permutace σ značíme $\operatorname{inv}\sigma$. Je zřejmé, že $\operatorname{inv}\sigma = \operatorname{inv}\sigma^{-1}$.

Definice 3.1.4. *Signum (znaménko)* permutace $\sigma \in S_n$ je $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{\operatorname{inv}\sigma}$. Permutace s $\operatorname{sgn}\sigma = 1$ je *sudá*, permutace s $\operatorname{sgn}\sigma = -1$ je *lichá*.

Jelikož $\operatorname{inv}\sigma = \operatorname{inv}\sigma^{-1}$, $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$.

Tvrzení 3.1.2. *Buďte $\rho, \sigma \in S_n$. Pak* $\operatorname{sgn}(\pi \circ \rho) = \operatorname{sgn}\pi \cdot \operatorname{sgn}\rho$.

Cvičení. Ukažte, že každá transpozice je lichá permutace. ▷

Více o permutacích lze najít například v [Marvan, 4. Permutace].

3.2. Determinant

3.2.1. Definice a determinanty některých typů matic

Definice 3.2.1. Buď A matice typu $n \times n$ nad polem P. *Determinant* matice A je

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1} A^2_{\sigma_2} \cdots A^n_{\sigma_n} \in P.$$

Číslo n je *řád* determinantu.

Pro determinant matice A se používá značení

$$\det A = |A| = \det \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \dots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \dots & A^n_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \dots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \dots & A^n_n \end{vmatrix}.$$

Díky tomu, že σ je permutace (bijektivní zobrazení) na množině I_n, můžeme ji chápat jako zobrazení z množiny všech řádkových indexů do množiny všech sloupkových indexů matice A. Ke každému řádku je tedy vzájemně jednoznačně přiřazen sloupek a v každém součinu $A^1_{\sigma_1} \cdot A^2_{\sigma_2} \cdots A^n_{\sigma_n}$ je tedy právě jeden prvek z každého řádku a právě jeden prvek z každého sloupku. Determinant matice A je tedy součet přes všechny permutace σ na množině I_n takovýchto součinů opatřených znaménkem $+$, jde-li o sudou, a znaménkem $-$, jde-li o lichou permutaci.

Příklad. (1) Nechť $n = 1$. Tedy, $I_1 = \{1\}$, $S_1 = \{\mathrm{id}\colon \{1\} \to \{1\}\}$ a $\operatorname{sgn} \mathrm{id} = 1$. Pro matici $A = \big(a\big)$ je $\det A = \operatorname{sgn} \mathrm{id} \cdot A^1_{\mathrm{id}_1} = 1 \cdot A^1_1 = a$.

(2) Nechť $n = 2$. Tedy, $I_2 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{\mathrm{id}, \tau\}$, kde $\mathrm{id} = (1, 2)$ a $\tau = (2, 1)$ (viz zápis permutace na I_n), $\operatorname{sgn} \mathrm{id} = 1$ a $\operatorname{sgn} \tau = -1$. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

je $\det A = \operatorname{sgn} \mathrm{id} \cdot A^1_{\mathrm{id}_1} A^2_{\mathrm{id}_2} + \operatorname{sgn} \tau \cdot A^1_{\tau_1} A^2_{\tau_2} = 1 \cdot A^1_1 A^2_2 + (-1) \cdot A^1_2 A^2_1 = ad - bc$. Vzorec pro výpočet determinantu matice druhého řádu je možno odvodit z následujícího obrázku:

$$\begin{array}{cc} \oplus & \ominus \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} A^1_1 & A^1_2 \\ A^2_1 & A^2_2 \end{vmatrix} = A^1_1 A^2_2 - A^1_2 A^2_1$$

(3) Nechť $n = 3$. Tedy, $I_3 = \{1, 2, 3\}$, $S_3 = \{\mathrm{id}, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, kde $\mathrm{id} = (1, 2, 3)$, $\sigma_1 = (2, 3, 1)$, $\sigma_2 = (3, 1, 2)$, $\tau_1 = (1, 3, 2)$, $\tau_2 = (3, 2, 1)$, $\tau_3 = (2, 1, 3)$ (viz zápis permutace na I_n), $\operatorname{sgn} \mathrm{id} = \operatorname{sgn} \sigma_1 = \operatorname{sgn} \sigma_2 = 1$ a $\operatorname{sgn} \tau_1 = \operatorname{sgn} \tau_2 = \operatorname{sgn} \tau_3 = -1$. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

je

$$\begin{aligned}
\det A = {} & \operatorname{sgn} \mathrm{id} \cdot A^1_{\mathrm{id}_1} A^2_{\mathrm{id}_2} A^3_{\mathrm{id}_3} + \operatorname{sgn} \sigma_1 \cdot A^1_{\sigma_1(1)} A^2_{\sigma_1(2)} A^3_{\sigma_1(3)} + \\
& + \operatorname{sgn} \sigma_2 \cdot A^1_{\sigma_2(1)} A^2_{\sigma_2(2)} A^3_{\sigma_2(3)} + \operatorname{sgn} \tau_1 \cdot A^1_{\tau_1(1)} A^2_{\tau_1(2)} A^3_{\tau_1(3)} + \\
& + \operatorname{sgn} \tau_2 \cdot A^1_{\tau_2(1)} A^2_{\tau_2(2)} A^3_{\tau_2(3)} + \operatorname{sgn} \tau_3 \cdot A^1_{\tau_3(1)} A^2_{\tau_3(2)} A^3_{\tau_3(3)} = \\
= {} & 1 \cdot A^1_1 A^2_2 A^3_3 + 1 \cdot A^1_2 A^2_3 A^3_1 + 1 \cdot A^1_3 A^2_1 A^3_2 + \\
& + (-1) \cdot A^1_1 A^2_3 A^3_2 + (-1) \cdot A^1_3 A^2_2 A^3_1 + (-1) \cdot A^1_2 A^2_1 A^3_3 = \\
= {} & aei + bfg + cdh - afh - ceg - bdi.
\end{aligned}$$

Vzorec pro výpočet determinantu matice třetího řádu lze odvodit z následujího obrázku pomocí *Sarrusova pravidla* (pro matice vyššího řádu žádné takové pravidlo neexistuje):

$$\begin{array}{c|ccc|c}
\oplus & A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 & \ominus \\
\oplus & A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 & \ominus \\
\oplus & A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 & \ominus \\
 & A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 & \\
 & A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 &
\end{array}
\quad = \quad
\begin{aligned} & A^1_1 A^2_2 A^3_3 + A^1_2 A^2_3 A^3_1 + A^1_3 A^2_1 A^3_2 - \\ & - A^1_1 A^2_3 A^3_2 - A^1_3 A^2_2 A^3_1 - A^1_2 A^2_1 A^3_3 \end{aligned}$$

(4) Nechť $n = 4$. Na čtyřprvkové množině existují 24 permutace, takže při výpočtu determinantu podle definice dostaneme 24 sčítance. Uvedeme si i jiné způsoby výpočtu determinantu. ■

Cvičení. Spočtěte determinanty matic

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&6\\2&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&5\\5&6&7\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&2\\5&6&7\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&4&6\\3&4&5\\5&6&7\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}3&4&5\\1&2&3\\5&6&7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\3&4&5\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&3\\1&0&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&3&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&3&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&2\\0&0&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\1&2&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&2\\4&5&5\\7&8&8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&0\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&0\\0&4&0\\0&5&6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&3\\1&-4&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&3\\1&2&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&0\\4&5&6\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\4&5&6\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\\4&5&6\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\4&5&6\end{pmatrix}\qquad\triangleright$$

Tvrzení 3.2.1. *Determinant matice s nulovým řádkem nebo nulovým sloupkem je roven nule.*

Důkaz. Buď A matice typu $n \times n$ s nulovým řádkem nebo nulovým sloupkem. Pro každé $\sigma \in S_n$ je v součinu $A^1_{\sigma_1} A^2_{\sigma_2} \cdots A^n_{\sigma_n}$ právě jeden prvek z každého, tedy i nulového řádku a právě jeden prvek z každého, tedy i nulového sloupku. Proto je každý takový součin roven nule. □

Cvičení. Dokažte, že pro determinanty lišící se pouze v jednom řádku platí

$$\begin{vmatrix}A^1_1&\dots&A^1_n\\&\dots&\\A^i_1&\dots&A^i_n\\&\dots&\\A^n_1&\dots&A^n_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}A^1_1&\dots&A^1_n\\&\dots&\\B^i_1&\dots&B^i_n\\&\dots&\\A^n_1&\dots&A^n_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A^1_1&\dots&A^1_n\\&\dots&\\A^i_1+B^i_1&\dots&A^i_n+B^i_n\\&\dots&\\A^n_1&\dots&A^n_n\end{vmatrix}.\qquad\triangleright$$

Příklad.

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\1&0&0\\4&5&6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&0\\4&5&6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&3\\0&0&1\\4&5&6\end{vmatrix}=3+(-6)+3=0=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&1\\4&5&6\end{vmatrix}.\qquad\blacksquare$$

Definice 3.2.2. Čtvercová matice je (*horní* resp. *dolní*) *trojúhelníková* (nebo v (*horním* resp. *dolním*) *trojúhelníkovém tvaru*), jestliže pod resp. nad diagonálou má jen nuly, tedy $A^i_j = 0$ pro $i > j$ resp. pro $i < j$.

Každá čtvercová matice ve schodovitém tvaru je také v (horním) trojúhelníkovém tvaru a tedy každou čtvercovou matici lze pomocí řádkových elementárních úprav převést na trojúhelníkový tvar.

Tvrzení 3.2.2. *Determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na diagonále.*

Důkaz. Buď A horní trojúhelníková matice typu $n \times n$. Buď σ permutace na množině I_n. Jestliže pro nějaké $i \in I_n$ platí $\sigma_i < i$, pak $A^i_{\sigma_i}$ je pod diagonálou, tedy $A^i_{\sigma_i} = 0$ a také $\operatorname{sgn}\sigma \cdot A^1_{\sigma_1} \cdots A^i_{\sigma_i} \cdots A^n_{\sigma_n} = 0$. Jediná permutace σ taková, že $\sigma_i \geq i$ pro každé i, je identita. Jelikož $\operatorname{sgn}\operatorname{id} = 1$, $\det A = A^1_1 A^2_2 \cdots A^n_n$.

Pro dolní trojúhelníkové matice je důkaz analogický. □

Důsledek. *(1) Determinant matice ve schodovitém tvaru je roven součinu prvků na diagonále.*

(2) Determinant diagonální matice je roven součinu prvků na diagonále.

(3) Determinant jednotkové matice je roven 1.

Příklad.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24.$$ ■

Determinanty elementárních matic jsou nenulové.

Příklad. (1) $E^{i,j}(c)$ je trojúhelníková matice a na diagonále má jen jedničky, proto

$$\det E^{i,j}(c) = 1.$$

(2) $E^i(c)$ je diagonální matice a na diagonále má jedno c a jinak jen jedničky, proto

$$\det E^i(c) = c.$$

(3) Jelikož v každém řádku a v každém sloupku matice $E^{i,j}$ je právě jedna jednička a ostatní prvky jsou nuly, existuje jediná permutace τ na I_n, pro kterou jsou všechny $(E^{i,j})^1_{\tau_1}, \dots, (E^{i,j})^n_{\tau_n}$ rovny jedné. Pro ostatní permutace je aspoň jeden z těchto prvků nulový. Díky tvaru $E^{i,j}$ je τ transpozice, takže $\sin\tau = -1$. Proto

$$\det E^{i,j} = (-1) \cdot (E^{i,j})^1_{\tau_1} \cdots (E^{i,j})^n_{\tau_n} = -1.$$ ■