3. přednáška, 12. 10. 2021

2.4. Inverzní matice

Definice 2.4.1. Buď A čtvercová matice. Matice X je *inverzní* k matici A, je-li stejného typu a platí

$$AX = XA = E.$$

Inverzní matice k matici A se značí A^{-1}. Matice je *invertibilní*, existuje-li matice k ní inverzní.

Příklad. (1) Každá jednotková matice E je invertibilní a $E^{-1} = E$.

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ je invertibilní, protože } A \cdot A = E, \text{ a tedy } A^{-1} = A.$$

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{není invertibilní, protože pro libovolnou matici } X \text{ typu } 2 \times 2 \\ AX \text{ má druhý řádek nulový a není to tedy jednotková matice.} \end{array}$$

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{není invertibilní, protože pro libovolnou matici } X \text{ typu } 2 \times 2 \\ XA \text{ má první sloupek nulový a není to tedy jednotková matice.} \end{array}$$

(5) Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Aby X byla inverzní k A, musí platit $AX = E$, tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z toho dostaneme rovnosti

$$a - c = 1, \quad b - d = 0, \quad a - c = 0, \quad b - d = 1.$$

Ze třetí rovnosti máme $a = c$ a po dosazení do první rovnosti máme $0 = 1$, což je spor. Z toho vyplývá, že neexistuje matice X taková, že $AX = E$, a matice A tedy není invertibilní.

(6) Žádná nulová matice není invertibilní.

(7) Elementární matice jsou invertibilní a přímým výpočtem lze ověřit (cvičení), že

$$(E^{i,j}(c))^{-1} = E^{i,j}(-c), \qquad (E^i(c))^{-1} = E^i(c^{-1}), \qquad (E^{i,j})^{-1} = E^{i,j}. \qquad \blacksquare$$

Tvrzení 2.4.1. *Ke každé matici existuje nejvýše jedna inverzní matice.*

Důkaz. Předpokládejme, že X', X'' jsou inverzní matice k matici A. Tedy $AX' = X'A = AX'' = X''A = E$. Potom $X' = EX' = X''AX' = X''E = X''$. $\square$

Tvrzení 2.4.2. *Nechť $A, A_1, \ldots, A_n$ jsou invertibilní matice stejného typu. Potom*

(1) $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ je invertibilní a $(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}$;
(2) A^{-1} je invertibilní a $(A^{-1})^{-1} = A$;
(3) A^{T} je invertibilní a $(A^{\mathsf{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{T}}$.

Důkaz. (1) $(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) \cdot (A_n^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) = E = (A_n^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}) \cdot (A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)$ a podle definice inverzní matice tedy $(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}$.

(2) $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ a podle definice inverzní matice tedy $(A^{-1})^{-1} = A$.

(3) $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, tedy $E = E^\mathsf{T} = (A^{-1}A)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T}(A^{-1})^\mathsf{T}$ a $E = (AA^{-1})^\mathsf{T} = (A^{-1})^\mathsf{T}A^\mathsf{T}$ a podle definice inverzní matice $(A^\mathsf{T})^{-1} = (A^{-1})^\mathsf{T}$. □

Tvrzení 2.4.3. *Nechť A, B jsou čtvercové matice takové, že $AB = E$. Pak $BA = E$, obě matice A, B jsou invertibilní a jsou vzájemně inverzní ($A = B^{-1}$ a $B = A^{-1}$).*

Důkaz. Matici A upravme řádkovými elementárními úpravami na Gaussův–Jordanův tvar G, tedy $G = Q_k \ldots Q_1 A$, kde $Q_1, \ldots, Q_k$ jsou elementární matice příslušné provedeným úpravám. Pak $A = Q_1^{-1} \ldots Q_k^{-1} G$ a $AB = Q_1^{-1} \ldots Q_k^{-1} GB = E$. Matice G nemá nulový řádek, protože jinak by matice GB také měla nulový řádek a takovou matici nelze pomocí řádkových elementárních úprav (v tomto případě reprezentovaných maticemi $Q_1^{-1}, \ldots, Q_k^{-1}$) převést na jednotkovou matici (cvičení). Jelikož G je v Gaussově–Jordanově tvaru a nemá nunový řádek, $G = E$. Pak $A = Q_1^{-1} \ldots Q_k^{-1}$ je invertibilní matice jakožto součin invertibilních matic a existuje tedy A^{-1}.

Potom $BA = EBA = A^{-1}ABA = A^{-1}EA = A^{-1}A = E$. Jelikož $AB = BA = E$, jsou obě matice A, B invertibilní a jsou vzájemně inverzní. □

Nyní zformulujeme důležité kriterium invertibility.

Tvrzení 2.4.4. *Matice je invertibilní právě tehdy, když je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.*

Důkaz. „$\Rightarrow$“ Nechť A je invertibilní matice. Řádkovými elementárními úpravami ji převeďme na Gaussův–Jordanův tvar G, tedy $G = Q_k \ldots Q_1 A$, kde $Q_1, \ldots, Q_k$ jsou elementární matice příslušné provedeným úpravám. Každá z matic $Q_1, \ldots, Q_k, A$ je invertibilní a jejich součin G je také invertibilní. Potom G, jakožto invertibilní matice nemá nulový řádek a $G = E$, jelikož G je v Gaussově–Jordanově tvaru. Matice A je tedy řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.

„$\Leftarrow$“ Předpokládejme, že matice A je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí E, tedy $Q_k \ldots Q_1 A = E$, kde $Q_1, \ldots, Q_k$ jsou vhodné elementární matice. Označme si $Q = Q_k \ldots Q_2 Q_1$, tedy $QA = E$. Podle Tvrzení 2.4.3 je A invertibilní a $A^{-1} = Q$. □

Předchozí tvrzení nám nabízí postup pro výpočet inverzní matice. Podle důkazu totiž $A^{-1} = Q = Q_k \ldots Q_2 Q_1 = Q_k \ldots Q_2 Q_1 E$, což je matice, která vznikne z jednotkové matice provedením řádkových elementárních úprav odpovídajících násobení elementárními maticemi $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$. To jsou stejné úpravy (resp. matice), které převedly A na E.

Výpočet inverzní matice. K matici A typu $n \times n$ zprava připojíme jednotkovou matici stejného typu a vznikne matice typu $n \times 2n$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} A_1^1 & A_2^1 & \ldots & A_n^1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ A_1^2 & A_2^2 & \ldots & A_n^2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^m & A_2^m & \ldots & A_n^m & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right).$$

Řádkovými elementárními úpravami ji převedeme na matici, která v levé části má matici B v Gaussově–Jordanově tvaru. Mohou nastat dvě možnosti.

(1) $B = E$. Pak A je invertibilní a v pravé části matice vyjde A^{-1}.

(2) $B \neq E$ (B má nulový řádek). Pak A není invertibilní.

Příklad. Vypočítejme inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&2&1&0&0\\1&2&3&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\1&2&3&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\end{array}\right)\sim$$
$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&2&2&0&1&-1\\0&1&2&1&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&0&-1&1&-1\\0&1&2&1&0&0\end{array}\right)\sim$$
$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&0&-1&1&-1\\0&0&2&2&-1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&0&-1&1&-1\\0&0&1&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)\sim$$
$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&-1&1&-1\\0&0&1&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right).$$

Takže A je invertibilní a

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-1&1&-1\\1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad\text{(ověřte).}$$ ■

Příklad. Hledejme inverzní matici k matici

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&3\\2&1&0\end{pmatrix}.$$

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&2&1&0&0\\1&2&3&0&1&0\\2&1&0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&0&1&0\\2&1&0&0&0&1\\0&1&2&1&0&0\end{array}\right)\sim$$
$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&0&1&0\\0&-3&-6&0&-2&1\\0&1&2&1&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&0&1&0\\0&1&2&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&1&2&1&0&0\end{array}\right)\sim$$
$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&0&1&0\\0&1&2&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&0&1&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&2&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\0&0&0&1&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right).$$

Matice A tedy není řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí a není invertibilní. ■

Cvičení. Pokud existují, spočtěte inverzní matice k maticím

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&5\\5&6&7\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&3\\1&-4&3\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&3\\1&2&3\end{pmatrix}$$ ▷

2.5. Hodnost matice

2.5.1. Lineární nezávislost

Definice a tvrzení formulujeme pouze pro řádky matice, ale vše lze obdobně formulovat pro sloupky, uspořádané n-tice a matice.

Definice 2.5.1. Buďte $A^{i_1}_{\circ}, A^{i_2}_{\circ}, \dots, A^{i_k}_{\circ}$ řádky matice, $c_1, c_2, \dots, c_k \in P$. *Lineární kombinace* řádků $A^{i_1}_{\circ}, A^{i_2}_{\circ}, \dots, A^{i_k}_{\circ}$ s *koeficienty* $c_1, c_2, \dots, c_k$ je řádek

$$c_1A^{i_1}_{\circ} + c_2A^{i_2}_{\circ} + \dots + c_kA^{i_k}_{\circ} = \sum_{j=1}^{k} c_jA^{i_j}_{\circ}.$$

Máme-li prázdnou množinu řádků (tedy, nemáme žádný řádek), jejich lineární kombinaci definujeme jako nulový řádek. Takže, nulový řádek je lineární kombinací řádků z prázdné množiny.

Definice 2.5.2. Množina řádků $\{A^{i_1}_{\circ}, A^{i_2}_{\circ}, \dots, A^{i_k}_{\circ}\}$ je *lineárně nezávislá*, jestliže pro libovolné $c_1, c_2, \dots, c_k \in P$ z rovnosti

$$c_1A^{i_1}_{\circ} + c_2A^{i_2}_{\circ} + \dots + c_kA^{i_k}_{\circ} = 0_{\circ} \qquad \text{vyplývá} \qquad c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0,$$

tj. nulový řádek získáme jedině takovou lineární kombinací daných řádků, ve které jsou všechny koeficienty rovny nule.

Množina řádků $\{A^{i_1}_{\circ}, A^{i_2}_{\circ}, \dots, A^{i_k}_{\circ}\}$ je *lineárně závislá*, jestliže není lineárně nezávislá. Tedy, existují $c_1, c_2, \dots, c_k \in P$ taková, že aspoň jedno z nich je nenulové a přitom

$$c_1A^{i_1}_{\circ} + c_2A^{i_2}_{\circ} + \dots + c_kA^{i_k}_{\circ} = 0_{\circ}.$$

Tvrzení 2.5.1. *Množina řádků je lineárně závislá právě tehdy, když aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních.*

Důkaz. Předpokládejme, že množina řádků $\{A^{i_1}_{\circ}, A^{i_2}_{\circ}, \dots, A^{i_k}_{\circ}\}$ je lineárně závislá. Existují tedy koeficienty $c_1, c_2, \dots, c_k \in P$ takové, že aspoň jeden z nich je nenulový (například c_j) a $c_1A^{i_1}_{\circ} + \dots + c_jA^{i_j}_{\circ} + \dots + c_kA^{i_k}_{\circ} = 0_{\circ}$. Potom

$$\begin{aligned} c_jA^{i_j}_{\circ} &= -c_1A^{i_1}_{\circ} - \dots - c_{j-1}A^{i_{j-1}}_{\circ} - c_{j+1}A^{i_{j+1}}_{\circ} - \dots - c_kA^{i_k}_{\circ}, \\ A^{i_j}_{\circ} &= -\frac{c_1}{c_j}A^{i_1}_{\circ} - \dots - \frac{c_{j-1}}{c_j}A^{i_{j-1}}_{\circ} - \frac{c_{j+1}}{c_j}A^{i_{j+1}}_{\circ} - \dots - \frac{c_k}{c_j}A^{i_k}_{\circ} \end{aligned}$$

a řádek $A^{i_j}_{\circ}$ je tedy lineární kombinací ostatních řádků.

Předpokládejme, že například řádek $A^{i_j}_{\circ}$ je lineární kombinací ostatních řádků, tedy

$$A^{i_j}_{\circ} = c_1A^{i_1}_{\circ} + \dots + c_{j-1}A^{i_{j-1}}_{\circ} + c_{j+1}A^{i_{j+1}}_{\circ} + \dots + c_kA^{i_k}_{\circ}.$$

Potom

$$c_1A^{i_1}_{\circ} + \dots + c_{j-1}A^{i_{j-1}}_{\circ} - A^{i_j}_{\circ} + c_{j+1}A^{i_{j+1}}_{\circ} + \dots + c_kA^{i_k}_{\circ} = 0_{\circ}$$

a zároveň $c_j = -1$. Takže množina řádků $\{A^{i_1}_{\circ}, A^{i_2}_{\circ}, \dots, A^{i_k}_{\circ}\}$ je lineárně závislá. □

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nechť

$$\begin{aligned} & c_1\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & \quad = \begin{pmatrix} c_2 + c_3 & c_1 + 2c_2 & 2c_1 + 3c_2 + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Takže

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 \qquad &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

a to je možné jedině v případě, že $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (vyřešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých c_1, c_2, c_3 a získáme jediné, nulové řešení).

Množina řádků matice A je tedy lineárně nezávislá. ■

Příklad. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nechť

$$\begin{aligned} & c_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ & \quad = \begin{pmatrix} c_2 + 2c_3 & c_1 + 2c_2 + c_3 & 2c_1 + 3c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soustava

$$\begin{aligned} c_2 + 2c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 &= 0 \end{aligned}$$

má kromě nulového i nenulová řešení (například $c_1 = 3$, $c_2 = -2$, $c_3 = 1$). Množina řádků matice A je tedy lineárně závislá. ■

Příklad. (1) Množina řádků jednotkové matice je lineárně nezávislá. Ověřte.

(2) Množina řádků, z nichž aspoň jeden je nulový, je lineárně závislá. Ověřte.

(3) Jednoprvková množina obsahující řádek $A^i_\circ$ je lineárně nezávislá, jestliže z $cA^i_\circ = 0_\circ$ plyne $c = 0$. Tedy, jednoprvková množina obsahující jeden řádek je lineárně nezávislá, jestliže ten řádek je nenulový, a je lineárně závislá, jestliže ten řádek je nulový.

(4) Množina obsahující jen řádky $A^{i_1}_\circ, A^{i_2}_\circ$ je lineárně závislá právě tehdy, když jeden z řádků je násobkem druhého z řádků (existuje $c \in P$ takové, že $A^{i_1}_\circ = cA^{i_2}_\circ$).

(5) Prázdná množina řádků je lineárně nezávislá. ■

2.5.2. Hodnost matice

Definice 2.5.3. *Hodnost* matice je maximální počet prvků lineárně nezávislých množin jejích řádků. Hodnost matice A značíme $\operatorname{rank} A$.

Příklad. (1) Hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je rovna 3. Ověřte.

(2) Hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je rovna 2. Ověřte.

(3) Hodnost nulové matice je rovna 0, hodnost nenulové matice je kladná.

(4) Hodnost diagonální matice je rovna počtu jejích nenulových řádků. ■

Cvičení. Spočtěte hodnosti matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & -1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 4 & 5\\5 & 6 & 7\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 1 & 3\\1 & -4 & 3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 1 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} \qquad \triangleright$$