

**Tvrzení 2.2.2.** *Nechť  $A, B, C$  jsou matice nad polem  $P$  takové, že níže uvedené operace jsou definovány, a  $c \in P$ . Pak platí*

$$\begin{array}{ll} (1) A(BC) = (AB)C, & (4) (A+B)C = AC + BC, \\ (2) AE = EA = A, & (5) c(AB) = (cA)B = A(cB). \\ (3) A(B+C) = AB + AC, & \end{array}$$

*Důkaz.* Uvedeme jen důkaz bodů (1) a (3), ostatní ponecháme jako cvičení.

(1) Předpokládejme, že  $A$  je matice typu  $m \times n$ ,  $B$  je matice typu  $n \times p$  a  $C$  je matice typu  $p \times q$ . Potom  $AB$  je matice typu  $m \times p$  a  $BC$  je matice typu  $n \times q$ , takže  $A(BC)$  a  $(AB)C$  jsou matice typu  $m \times q$ .

$$\begin{aligned} (A(BC))_j^i &= \sum_{k=1}^n A_k^i (BC)_j^k = && \text{(podle definice součinu matic)} \\ &= \sum_{k=1}^n A_k^i \sum_{l=1}^p (B_l^k C_j^l) = && \text{(podle definice součinu matic)} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p A_k^i (B_l^k C_j^l) = && \text{(díky distributivnímu zákonu v poli)} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p (A_k^i B_l^k) C_j^l = && \text{(díky asociativitě součinu v poli)} \\ &= \sum_{l=1}^p \sum_{k=1}^n (A_k^i B_l^k) C_j^l = && \text{(díky komutativitě součtu v poli)} \\ &= \sum_{l=1}^p (AB)_l^i C_j^l = && \text{(podle definice součinu matic)} \\ &= ((AB)C)_j^i. && \text{(podle definice součinu matic)} \end{aligned}$$

(3) Předpokládejme, že  $A$  je matice typu  $m \times n$  a  $B, C$  jsou matice typu  $n \times p$ . Potom  $A(B+C)$  a  $AB+AC$  jsou matice typu  $m \times p$  a pro každé  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  a  $j \in \{1, 2, \dots, p\}$  platí

$$\begin{aligned} (A(B+C))_j^i &= \sum_{k=1}^n A_k^i (B+C)_j^k = && \text{(podle definice součinu matic)} \\ &= \sum_{k=1}^n A_k^i (B_j^k + C_j^k) = && \text{(podle definice součtu matic)} \\ &= \sum_{k=1}^n (A_k^i B_j^k + A_k^i C_j^k) = && \text{(díky distributivnímu zákonu v poli)} \\ &= \sum_{k=1}^n A_k^i B_j^k + \sum_{k=1}^n A_k^i C_j^k = && \text{(díky vlastnostem sčítání v poli)} \\ &= (AB)_j^i + (AC)_j^i = && \text{(podle definice součinu matic)} \\ &= (AB+AC)_j^i. && \text{(podle definice součtu matic)} \quad \square \end{aligned}$$

### 2.2.3. Transponování

**Definice 2.2.4.** *Transponovaná matice k matici  $A$  typu  $m \times n$  je matice  $A^T$  typu  $n \times m$ , kde  $(A^T)_j^i = A_i^j$  pro všechna  $i, j$ .*

**Příklad.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

**Tvrzení 2.2.3.** *Nechť  $A, B$  jsou matice nad polem  $P$  takové, že níže uvedené operace jsou definovány, a  $c \in P$ . Pak platí*

$$\begin{array}{ll} (1) A = (A^T)^T, & (3) (cA)^T = cA^T, \\ (2) (A+B)^T = A^T + B^T, & (4) (AB)^T = B^T A^T. \end{array}$$

*Důkaz.* (1) Je-li  $A$  typu  $m \times n$ , potom  $A^T$  je typu  $n \times m$  a  $(A^T)^T$  je typu  $m \times n$ . Navíc pro každé  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  a  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  platí

$$((A^T)^T)_j^i = (A^T)_i^j = A_j^i.$$

(4) Buďte  $A$  matice typu  $m \times n$  a  $B$  matice typu  $n \times p$ . Pak  $A^T$  je typu  $n \times m$ ,  $B^T$  je typu  $p \times n$ ,  $AB$  je typu  $m \times p$  a tedy  $(AB)^T$  i  $B^T A^T$  jsou typu  $p \times m$ . Pro každé  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$  a  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  platí

$$\begin{aligned} ((AB)^T)_j^i &= (AB)_i^j = \sum_{k=1}^n A_k^j B_i^k = \sum_{k=1}^n B_i^k A_k^j = \sum_{k=1}^n (B^T)_k^i (A^T)_j^k = \\ &= (B^T A^T)_j^i. \end{aligned}$$

Ostatní body jsou ponechány jako cvičení.  $\square$

**Cvičení.** Ukažte, že pro libovolné  $k \in \mathbb{N}$  a libovolné matice  $A_1, \dots, A_k$  vhodných typů platí  $(A_1 \cdots A_k)^T = A_k^T \cdots A_1^T$ .  $\triangleright$

## 2.3. Elementární úpravy a speciální tvary matic

### 2.3.1. Elementární úpravy

**Definice 2.3.1.** *Mějme matici nad polem  $P$ . Řádkové elementární úpravy matice jsou*

- (1) přičtení  $c$ -násobku  $j$ -tého řádku k  $i$ -tému řádku, kde  $c \in P$  a  $i \neq j$ ,
- (2) vynásobení  $i$ -tého řádku nenulovým prvkem  $c \in P$ ,
- (3) vzájemná výměna  $i$ -tého řádku a  $j$ -tého řádku.

*Sloupkové elementární úpravy matice definujeme analogicky.*

**Cvičení.** Provedte vzájemnou výměnu dvou řádků pomocí konečně mnoha úprav typů (1) a (2).  $\triangleright$

Mějme matici  $A$ . Přičtením  $c$ -násobku  $j$ -tého řádku k  $i$ -tému řádku změníme  $i$ -tý řádek na  $(A_1^i + cA_1^j \quad A_2^i + cA_2^j \quad \dots \quad A_n^i + cA_n^j)$  a ostatní řádky zůstanou beze změny.

Po vynásobení  $i$ -tého řádku prvkem  $c \in P$   $i$ -tý řádek bude  $(cA_1^i \quad cA_2^i \quad \dots \quad cA_n^i)$  a ostatní řádky zůstanou beze změny.

Po vzájemné výměně  $i$ -tého řádku a  $j$ -tého řádku  $i$ -tý řádek bude  $(A_1^j \quad A_2^j \quad \dots \quad A_n^j)$ ,  $j$ -tý řádek bude  $(A_1^i \quad A_2^i \quad \dots \quad A_n^i)$  a ostatní řádky zůstanou beze změny.

Sloupkové úpravy fungují analogicky pro sloupky.

**Příklad.** (1) Přičtením 3-násobku prvního řádku k druhému řádku upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ na matici } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix}.$$

(2) Vzájemnou výměnou prvního sloupku a třetího sloupku upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix} \text{ na matici } \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Ke všem elementárním úpravám existují úpravy inverzní, které jsou také elementární a upravenou matici převedou zpět na původní matici. Inverzní úpravy k řádkovým úpravám jsou

- (1) přičtení  $-c$ -násobku  $j$ -tého řádku k  $i$ -tému řádku,
- (2) vynásobení  $i$ -tého řádku prvkem  $c^{-1}$ ,
- (3) výměna  $i$ -tého řádku a  $j$ -tého řádku.

Inverzní úpravy ke sloupkovým úpravám jsou obdobné.

**Příklad.** (1) Přičtením  $-3$ -násobku prvního řádku k druhému řádku upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix} \text{ na matici } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(2) Vzájemnou výměnou prvního sloupku a třetího sloupku upravíme matici

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix} \text{ na matici } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

**Definice 2.3.2.** Matice  $A, B$  jsou *ekvivalentní*, jestliže  $B$  může vzniknout z  $A$  konečnou posloupností elementárních úprav. Je-li možné toho dosáhnout pomocí pouze řádkových, resp. sloupkových úprav, matice jsou *řádkově*, resp. *sloupkově ekvivalentní*. V každém případě značíme  $A \sim B$ .

**Příklad.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

**Tvrzení 2.3.1.** *Ekvivalence matic je relace ekvivalence na množině všech matic stejného typu nad stejným polem.*

*Důkaz.* Cvičení. □

### 2.3.2. Schodovitý, Gaussův–Jordanův a Gaussův kanonický tvary matic

Připomeňme si definice z podkapitoly 2.1.

**Definice 2.3.3.** Matice je ve *schodovitém tvaru*, jestliže každý nenulový řádek, kromě prvního řádku, začíná zleva více nulami než řádek předchozí.

To znamená, že všechny řádky pod nulovým řádkem jsou nulové.

**Definice 2.3.4.** Matice je v *Gaussově–Jordanově tvaru*, jestliže

- (i) je ve schodovitém tvaru,
- (ii) v každém nenulovém řádku první (zleva) nenulový prvek je 1,
- (iii) v každém sloupcu, ve kterém je první nenulový prvek nějakého řádku, ostatní prvky jsou 0.

**Definice 2.3.5.** *Gaussův kanonický tvar* matice je

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde  $E$  je jednotková matice a  $0$  označuje nulové matice příslušných typů.

**Příklad.** (1) Necht

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice  $A$  není ve schodovitém tvaru. Matice  $B$  je ve schodovitém tvaru, ale není v Gaussově–Jordanově tvaru. Matice  $C$  je v Gaussově–Jordanově tvaru.

(2) Každá nulová matice je v Gaussově–Jordanově tvaru. ■

**Definice 2.3.6.** Mějme nenulovou matici. *Gaussova eliminace* je úprava matice podle následujícího algoritmu.

Buď  $i = 1$ .

- (1) Uvažujme první nenulový sloupek, který má nějaký nenulový prvek v  $i$ -tém nebo nižším řádku.
- (2) Není-li v  $i$ -tém řádku uvažovaného sloupku nenulový prvek, vyměníme  $i$ -tý řádek s vhodným nižším řádkem.
- (3) V uvažovaném sloupku vynulujeme prvky v řádcích pod  $i$ -tým řádkem přičtením vhodných násobků  $i$ -tého řádku.
- (4) Vezměme  $i$  o 1 větší ( $i := i + 1$ ). Existuje-li nenulový sloupek, který má nějaký nenulový prvek v  $i$ -tém nebo nižším řádku, vraťme se do bodu (1). Jestliže takový sloupek neexistuje, algoritmus končí.

**Tvrzení 2.3.2.** Každá matice je řádkově ekvivalentní matici ve schodovitém tvaru.

*Důkaz.* Nulová matice je ve schodovitém tvaru. Libovolnou nenulovou matici upravíme pomocí Gaussovy eliminace. Všechny provedené úpravy jsou řádkové elementární úpravy a z postupu při Gaussově eliminaci vyplývá, že každý nenulový řádek, kromě prvního řádku, začíná více nulami než řádek předchozí. □

**Definice 2.3.7.** Mějme nenulovou matici. *Gaussova–Jordanova eliminace* je úprava matice podle následujícího algoritmu.

Buď  $i = 1$ .

- (1) Uvažujme první nenulový sloupek, který má nějaký nenulový prvek v  $i$ -tém nebo nižším řádku.
- (2) Není-li v  $i$ -tém řádku uvažovaného sloupku nenulový prvek, vyměníme  $i$ -tý řádek s vhodným nižším řádkem.
- (3)  $i$ -tý řádek vydělíme jeho prvním nenulovým prvkem.
- (4) V uvažovaném sloupku vynulujeme prvky mimo  $i$ -tý řádek přičtením vhodných násobků  $i$ -tého řádku.
- (5) Vezměme  $i$  o 1 větší ( $i := i + 1$ ). Existuje-li nenulový sloupek, který má nějaký nenulový prvek v  $i$ -tém nebo nižším řádku, vraťme se do bodu (1). Jestliže takový sloupek neexistuje, algoritmus končí.

**Tvrzení 2.3.3.** Každá matice je řádkově ekvivalentní matici v Gaussově–Jordanově tvaru.

*Důkaz.* Nulová matice je v Gaussově–Jordanově tvaru. Libovolnou nenulovou matici upravíme pomocí Gaussovy–Jordanovy eliminace. Všechny provedené úpravy jsou řádkové elementární úpravy a z postupu při Gaussově–Jordanově eliminaci vyplývá, že výsledná matice je v Gaussově–Jordanově tvaru. □

**Tvrzení 2.3.4.** Každá nenulová matice je ekvivalentní matici v Gaussově kanonickém tvaru.

*Důkaz.* S použitím řádkových i sloupkových elementárních úprav a vhodnou úpravou Gaussovy–Jordanovy eliminace získáme algoritmus, který převádí libovolnou nenulovou matici na ekvivalentní matici v Gaussově kanonickém tvaru. Podrobnosti ponecháme jako cvičení.  $\square$

### 2.3.3. Elementární matice

**Definice 2.3.8.** *Elementární matice* jsou:

(1) pro  $i \neq j$

$$E^{i,j}(c) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & c & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

(2) pro  $c \neq 0$

$$E^i(c) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & c & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} i$$

(3) pro  $i \neq j$

$$E^{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Každá elementární matice vznikne z jednotkové matice provedením vhodné řádkové nebo sloupkové elementární úpravy.

Matice  $E^{i,j}(c)$  vznikne z jednotkové matice  $E$  přičtením  $c$ -násobku  $j$ -tého řádku k  $i$ -tému řádku a od jednotkové matice se liší jen tím, že  $(E^{i,j}(c))_j^i = c$ , zatímco  $E_j^i = 0$ .

Matice  $E^i(c)$  vznikne z jednotkové matice  $E$  vynásobením  $i$ -tého řádku prvkem  $c$  a od jednotkové matice se liší jen tím, že  $(E^i(c))_i^i = c$ , zatímco  $E_i^i = 1$ .

Matice  $E^{i,j}$  vznikne z jednotkové matice  $E$  výměnou  $i$ -tého řádku a  $j$ -tého řádku a od jednotkové matice liší jen tím, že  $i$ -tý a  $j$ -tý řádky jsou vyměněny.

**Lemma 2.3.5.** *Budte  $A, B$  matice.*

- (1) *Matice  $B$  může vzniknout z matice  $A$  pomocí jedné řádkové elementární úpravy právě tehdy, když existuje elementární matice  $Q$  taková, že  $B = QA$ .*
- (2) *Matice  $B$  může vzniknout z matice  $A$  pomocí jedné sloupkové elementární úpravy právě tehdy, když existuje elementární matice  $Q$  taková, že  $B = AQ$ .*

*Důkaz.* Přímým výpočtem lze ověřit, že přičtení  $c$ -násobku  $j$ -tého řádku k  $i$ -tému řádku je totéž co vynásobení maticí  $E^{i,j}(c)$  zleva, vynásobení  $i$ -tého řádku prvkem  $c \in P$  je totéž co vynásobení maticí  $E^i(c)$  zleva a výměna  $i$ -tého řádku a  $j$ -tého řádku je totéž co vynásobení maticí  $E^{i,j}$  zleva. Analogicky pro sloupkové úpravy a násobení zprava. Cvičení.  $\square$

**Lemma 2.3.6.** *Transponované matice k elementárním maticím jsou elementární matice.*

*Důkaz.* Cvičení.

□