1. přednáška, 21. 9. 2021

1. Pole

Uvažujme množinu všech reálných čísel. Reálná čísla sčítáme a násobíme, ke každému reálnému číslu existuje číslo opačné (součet čísla a k němu opačného čísla je roven 0), ke každému nenulovému reálnému číslu existuje číslo inverzní (převrácená hodnota, součin čísla a k němu inverzního čísla je roven 1). Pro libovolná reálná čísla a, b, c navíc platí

$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a \qquad \text{(součet a součin jsou komutativní,}$$
$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \qquad \text{asociativní}$$
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \text{a splňují distributivní zákon)}$$

Každá množina obsahující aspoň 2 prvky (obvykle označované 0 a 1) s uvedenými operacemi s uvedenými vlastnostmi se nazývá *pole*. Příkladem pole je *pole komplexních čísel*, které značíme $\mathbb{C}$.

Každá podmnožina množiny komplexních čísel, která obsahuje 0 a 1, s každým číslem obsahuje k němu opačné, s každým nenulovým číslem obsahuje k němu inverzní a s libovolnými dvěmi čísly obsahuje jejich součet i součin, se nazývá *číselné pole*.

Příklady číselných polí jsou množina komplexních čísel $\mathbb{C}$, množina reálných čísel $\mathbb{R}$ a množina racionáních čísel $\mathbb{Q}$. Například množina $\mathbb{Z}$ celých čísel a množina $\mathbb{N}$ přirozených (kladných celých) čísel nejsou pole.

Je-li P pole a n přirozené číslo, potom P^n označuje množinu všech uspořádaných n-tic prvků pole P.

Polím se ještě budeme věnovat později.

2. Matice

2.1. Matice

Definice 2.1.1. Buď P pole, buďte m, n přirozená čísla. *Matice* typu $m \times n$ nad polem P je tabulka o m řádcích a n sloupcích obsahující na každém místě nějaký prvek pole P (a nic jiného). Máme-li takovou matici A, pak prvek pole P v i-tém řádku a j-tém sloupku označujeme A^i_j a matici zapisujeme obvykle

$$A = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \dots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \dots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^m_1 & A^m_2 & \dots & A^m_n \end{pmatrix}$$

nebo stručněji $A = (A^i_j)_{m \times n}$ nebo jen $A = (A^i_j)$.

Matici typu $m \times n$ nad polem P je možné definovat také jako zobrazení z kartézského součinu $\{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ do pole P. Takové zobrazení tedy uspořádané dvojici (i, j) přiřazuje $A^i_j \in P$ a můžeme ho zapsat právě ve tvaru tabulky, která má v i-tém řádku a j-tém sloupku prvek A^i_j.

Horním indexům říkáme *řádkové*, dolním indexům říkáme *sloupkové*. Pro pevně zvolené i

$$A^i_\circ = \begin{pmatrix} A^i_1 & A^i_2 & \dots & A^i_n \end{pmatrix}$$

je *i-tý řádek* matice A; je to tedy matice typu $1\times n$, někdy ji zapisujeme jako uspořádanou n-tici $(A^i_1, A^i_2, \dots, A^i_n) \in P^n$. Nulový řádek označme $0_\circ$. Pro pevně zvolené j

$$A^\circ_j = \begin{pmatrix} A^1_j \\ A^2_j \\ \vdots \\ A^m_j \end{pmatrix}$$

je *j-tý sloupek* matice A; je to tedy matice typu $m\times 1$, někdy ji zapisujeme jako uspořádanou m-tici $(A^1_j, A^2_j, \dots, A^m_j) \in P^m$ nebo $\begin{pmatrix} A^1_j & A^2_j & \dots & A^m_j \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ nebo $(A^1_j, A^2_j, \dots, A^m_j)^\mathsf{T}$. Nulový sloupek označme 0°. To, že matice A je tvořena řádky $A^i_\circ$, resp. sloupky A°_j, budeme někdy zapisovat

$$A = \begin{pmatrix} A^1_\circ \\ A^2_\circ \\ \vdots \\ A^m_\circ \end{pmatrix}, \quad \text{resp. } A = \begin{pmatrix} A^\circ_1 & A^\circ_2 & \dots & A^\circ_n \end{pmatrix}.$$

Matice $A = (A^i_j)$ a $B = (B^i_j)$ se vzájemně rovnají, jestliže jsou stejného typu a na stejných místech mají stejné prvky, tedy jsou-li typu $m \times n$ a pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí $A^i_j = B^i_j$.

Definice 2.1.2. Matice $A = (A^i_j)_{m\times n}$ je

- *čtvercová*, jestliže $m = n$,
- *diagonální*, jestliže je čtvercová a $A^i_j = 0$ pro $i \neq j$ (prvky A^i_i se také nazývají *diagonální* a tvoří *(hlavní) diagonálu*),
- *jednotková*, jestliže je diagonální a $A^i_i = 1$ pro každé i (označujeme ji E_n nebo jen E),
- *nulová*, jestliže má všechny prvky nulové (označujeme ji $0_{m\times n}$ nebo jen 0),
- *horní* resp. *dolní trojúhelníková* (nebo v *horním* resp. *dolním trojúhelníkovém tvaru*), jestliže je čtvercová a pod resp. nad diagonálou má jen nuly, tedy $A^i_j = 0$ pro $i > j$ resp. pro $i < j$,
- *schodovitá* (nebo ve *schodovitém tvaru*), jestliže každý nenulový řádek, kromě prvního, začíná zleva více nulami než řádek předchozí,
- v *Gaussově–Jordanově tvaru*, jestliže
  (i) je ve schodovitém tvaru,
  (ii) první (zleva) nenulové prvky všech nenulových řádků jsou 1,
  (iii) ve sloupcích nad (a nejen pod) prvními nenulovými prvky všech nenulových řádků jsou jen 0.
- v *Gaussově kanonickém tvaru*, jestliže je rovna matici

  $$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

  kde E je jednotková matice a 0 označuje nulové matice příslušných typů.

Množinu všech matic typu $m \times n$ nad polem P označujeme $\mathcal{M}_{m\times n}(P)$ nebo $P^{m\times n}$; v případě čtvercových matic také $\mathcal{M}_n(P)$ nebo $\mathrm{gl}(n, P)$.

Příklad. (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ je čtvercová matice, } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ není čtvercová.}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ je diagonální matice, } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ není diagonální.}$$

(3)

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ jsou jednotkové matice.}$$

(4)

$$0_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ jsou nulové matice.}$$

(5)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ je horní, } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ je dolní trojúhelníková matice.}$$

(6)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ je matice ve schodovitém tvaru,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ není matice ve schodovitém tvaru.}$$

(7)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ je matice v Gaussově–Jordanově tvaru,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ není matice v Gaussově–Jordanově tvaru.}$$ ■

2.2. Operace s maticemi

2.2.1. Součet matic a násobek matice

Definice 2.2.1. Buďte A, B matice typu $m \times n$ nad polem P. *Součet* matic A, B je matice $A + B$ typu $m \times n$ nad polem P taková, že pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$(A + B)^i_j = A^i_j + B^i_j.$$

Sčítáme tedy jen matice stejného typu. Matice různých typů nelze sčítat.

Definice 2.2.2. Buďte A matice typu $m \times n$ nad polem P a $c \in P$. Potom *c-násobek* matice A je matice cA typu $m \times n$ nad polem P taková, že pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$(cA)^i_j = cA^i_j.$$

Pro $c = -1$ se matice $(-1)A$ značí $-A$ a nazývá se *opačná* matice k matici A.

Příklad. Pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 7 \end{pmatrix} \text{ je}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 + (-1) & 2 + 0 & 3 + 2 \\ 4 + 1 & 5 + (-3) & 6 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 13 \end{pmatrix},$$

$$6A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 24 & 30 & 36 \end{pmatrix}, \quad -B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -7 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Cvičení. Spočtěte

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}. \qquad \triangleright$$

Tvrzení 2.2.1. *Nechť A, B, C jsou matice stejného typu nad polem P a $c, k \in P$. Pak*

(1) $A + B = B + A$,
(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$,
(3) $A + 0 = A$,
(4) $A + (-A) = 0$,
(5) $1A = A$,
(6) $c(A + B) = cA + cB$,
(7) $(c + k)A = cA + kA$,
(8) $c(kA) = (ck)A$.

Důkaz. Uvedeme jen důkaz bodů (2) a (6), ostatní ponecháme jako cvičení.

(2) Máme dokázat, že matice $A+(B+C)$ se rovná matici $(A+B)+C$. Předpokládejme, že A, B, C jsou typu $m \times n$. Potom i $B + C$, $A + B$ jsou typu $m \times n$ a tedy i $A + (B + C)$ a $(A + B) + C$ jsou typu $m \times n$.

Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ prvek v i-tém řádku a j-tém sloupku matice $A + (B + C)$ je

$$\begin{aligned} (A + (B + C))^i_j &= A^i_j + (B + C)^i_j = && \text{(podle definice součtu matic)} \\ &= A^i_j + (B^i_j + C^i_j) = && \text{(podle definice součtu matic)} \\ &= (A^i_j + B^i_j) + C^i_j = && \text{(díky asociativitě sčítání v poli)} \\ &= (A + B)^i_j + C^i_j = && \text{(podle definice součtu matic)} \\ &= ((A + B) + C)^i_j, && \text{(podle definice součtu matic)} \end{aligned}$$

což je prvek v i-tém řádku a j-tém sloupku matice $(A + B) + C$.

Dokázali jsme, že matice $A + (B + C)$ a $(A + B) + C$ jsou stejného typu a na stejných místech mají stejné prvky.

(6) Máme dokázat, že matice $c(A + B)$ se rovná matici $cA + cB$. Předpokládejme, že A, B jsou typu $m \times n$. Potom i $A + B$, cA, cB jsou typu $m \times n$ a tedy i $c(A + B)$ a $cA + cB$ jsou typu $m \times n$.

Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ prvek v i-tém řádku a j-tém sloupku matice $c(A+B)$ je

$$\begin{aligned}
(c(A+B))^i_j &= c(A+B)^i_j = && \text{(podle definice } c\text{-násobku matice)}\\
&= c(A^i_j + B^i_j) = && \text{(podle definice součtu matic)}\\
&= cA^i_j + cB^i_j = && \text{(díky distributivnímu zákonu v poli)}\\
&= (cA)^i_j + (cB)^i_j = && \text{(podle definice } c\text{-násobku matice)}\\
&= (cA + cB)^i_j, && \text{(podle definice součtu matic)}
\end{aligned}$$

což je prvek v i-tém řádku a j-tém sloupku matice $cA + cB$.

Dokázali jsme, že matice $c(A+B)$ a $cA+cB$ jsou stejného typu a na stejných místech mají stejné prvky. □

2.2.2. Součin

Definice 2.2.3. Buďte A matice typu $m \times n$ a B matice typu $n \times p$ nad polem P. *Součin* matic A, B (v tomto pořadí) je matice $A \cdot B$ (obvykle označovaná jen AB) typu $m \times p$ nad polem P taková, že pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$

$$(AB)^i_j = A^i_1 B^1_j + A^i_2 B^2_j + \cdots + A^i_n B^n_j = \sum_{k=1}^{n} A^i_k B^k_j.$$

Matice B má tedy tolik řádků, kolik má matice A sloupků. Prvek matice AB v i-tém řádku a j-tém sloupku získáme tedy tak, že sečteme součiny prvků v i-tém řádku matice A s odpovídajícími prvky v j-tém sloupku matice B. Tedy

$$AB = \begin{pmatrix} A^1_1 B^1_1 + A^1_2 B^2_1 + \cdots + A^1_n B^n_1 & \cdots & A^1_1 B^1_p + A^1_2 B^2_p + \cdots + A^1_n B^n_p \\ A^2_1 B^1_1 + A^2_2 B^2_1 + \cdots + A^2_n B^n_1 & \cdots & A^2_1 B^1_p + A^2_2 B^2_p + \cdots + A^2_n B^n_p \\ \vdots & & \vdots \\ A^m_1 B^1_1 + A^m_2 B^2_1 + \cdots + A^m_n B^n_1 & \cdots & A^m_1 B^1_p + A^m_2 B^2_p + \cdots + A^m_n B^n_p \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A^1_1 B^1_\circ + A^1_2 B^2_\circ + \cdots + A^1_n B^n_\circ \\ A^2_1 B^1_\circ + A^2_2 B^2_\circ + \cdots + A^2_n B^n_\circ \\ \vdots \\ A^m_1 B^1_\circ + A^m_2 B^2_\circ + \cdots + A^m_n B^n_\circ \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B^1_1 A^\circ_1 + B^2_1 A^\circ_2 + \cdots + B^n_1 A^\circ_n & \cdots & B^1_p A^\circ_1 + B^2_p A^\circ_2 + \cdots + B^n_p A^\circ_n \end{pmatrix}.$$

Čili, i-tý řádek matice AB získáme tak, že pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ prvkem A^i_k vynásobíme k-tý řádek matice B a všechny tyto násobky sečteme, a j-tý sloupek matice AB získáme tak, že pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ prvkem B^k_j vynásobíme k-tý sloupek matice A a všechny tyto násobky sečteme.

Nejsou-li typy matic v uvedeném vztahu (druhá má tolik řádků, kolik má první sloupků), nelze je (v daném pořadí) násobit, příslušný součin neexistuje.

Příklad. (1) Pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ je}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 & (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

(2) Pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ je}$$
$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix},$$
$$BA = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 & 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(3) Pro

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ je } AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}, \; BA \text{ neexistuje.}$$ ■

Předcházející příklady ukazují, že násobení matic není komutativní, tedy nemusí platit $AB = BA$.

Cvičení. Spočtěte

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&4\\5&6&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&1\\5&6&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2&1\\0&6&5\\0&0&4\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&0&0\\4&5&0\\3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&3\\0&4&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&0&0\\0&4&3\\0&2&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&0\\0&0&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&4&0\\3&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&3&4\\0&5&6&7\\0&8&9&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&3&4&5\\0&6&7&8\\0&9&0&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&2&0&0\\3&4&0&0\\0&0&5&4\\0&0&3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&3&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&4\\0&0&2&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&3&0\\0&4&5&0\\0&0&0&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&3&4&0\\0&5&1&0\\0&0&0&6\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&0&0&0\\0&6&0&0\\0&0&7&0\\0&0&0&8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

$\triangleright$