13. Vlastní vektory

Mějme lineární transformaci $f\colon V \to V$ a jeji matici A vzhledem k nějaké bázi. Obraz vektoru v při lineární transformací f^n můžeme najít tak, že spočteme jeho souřadnice, a to tak že souřadnice vektoru v vynásobíme maticí A^n, protože to je matice transformace f^n (vše samozřejmě vzhledem ke zvolené bázi). Je tedy žádoucí volit bázi prostoru tak, aby matice transformace byla co nejjednodušší, pokud možno diagonální, protože potom se její mocnina počítá velice jednoduše.

13.1. Definice, příklady

Při lineární transformaci $f\colon V \to V$ se každý vektor z prostoru V zobrazí na některý vektor z téhož prostoru V. Může se tedy stát, že vektor se zobrazí na nějaký svůj skalární násobek.

Definice. Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace vektorového prostoru V nad polem P. Skalár $\lambda \in P$ se nazývá *vlastní hodnota* (v případě číselného pole P (podpole pole $\mathbb{C}$) *vlastní číslo*) transformace f, jestliže existuje nenulový vektor $v \in V$ takový, že

$$f(v) = \lambda v.$$

Každý vektor $v \in V$ takový, že $f(v) = \lambda v$, kde λ vlastní hodnota transformace f, se nazývá *vlastní vektor* transformace f příslušný vlastní hodnotě λ.

Analogicky jsou definovány vlastní vektory a vlastní hodnoty (čísla) čtvercové matice.

Definice. Buď A čtvercová matice řádu n nad polem P. Skalár $\lambda \in P$ se nazývá *vlastní hodnota* (*vlastní číslo*) matice A, jestliže existuje nenulový vektor (uspořádaná n-tice, sloupcová matice) $x \in P^n$ takový, že

$$Ax = \lambda x.$$

Každý vektor $x \in P^n$ takový, že $Ax = \lambda x$, kde λ vlastní hodnota matice A, se nazývá *vlastní vektor* matice A příslušný vlastní hodnotě λ.

Tedy, aby skalár λ byl vlastní hodnota, musí existovat nenulový vektor, který se zobrazí na svůj λ-násobek. Potom i nulový vektor je vlastní vektor příslušný vlastní hodnotě λ.

Příklad. (1) Je-li V netriviální prostor (obsahuje nenulový vektor), pak pro identickou transformaci $\mathrm{id}\colon V \to V$, $\mathrm{id}(v) = v$, každý vektor $v \in V$ je vlastní s vlastní hodnotou 1, protože $\mathrm{id}(v) = 1 \cdot v$.

(2) Je-li V netriviální prostor, pak pro nulovou transformaci $0\colon V \to V$, $0(v) = 0$, každý vektor $v \in V$ je vlastní s vlastní hodnotou 0, protože $0(v) = 0 \cdot v$.

(3) Je-li V netriviální prostor a c skalár, pak pro transformaci $f_c\colon V \to V$, $f_c(v) = cv$, každý vektor $v \in V$ je vlastní s vlastní hodnotou c.

(4) Pro rovnoběžné promítání $E^3 \to E^3$ podél vektoru $v \neq 0$ na rovinu $U \subset E^3$ procházející počátkem, kde $v \notin U$, vektor v a všechny jeho násobky jsou vlastní vektory s vlastním číslem 0, každý vektor z U je vlastní vektor s vlastním číslem 1 a jiné vlastní vektory tato transformace nemá.

(5) Pro rotaci $E^2 \to E^2$ o úhel $0 \le \varphi < 2\pi$:
(a) je-li $\varphi = 0$, pak jde o identickou transformaci a každý vektor je vlastní s vlastním číslem 1;
(b) je-li $\varphi = \pi$, pak jde o středovou symetrii $v \mapsto -v = (-1)v$ a každý vektor je vlastní s vlastním číslem -1;
(c) v ostatních případech neexistuje žádný vlastní vektor.

(6) Rotace $E^3 \to E^3$ o úhel $0 \le \varphi < 2\pi$ kolem zvolené pevné osy L procházející počátkem. Označme $L^\perp$ rovinu procházející počátkem kolmo k L (tzv. ortogonální doplněk).
(a) Je-li $\varphi = 0$, pak jde o identickou transformaci a každý vektor je vlastní s vlastním číslem 1;
(b) je-li $\varphi = \pi$, pak každý vektor z L je vlastní s vlastním číslem 1, každý vektor z $L^\perp$ je vlastní s vlastním číslem -1 a žádný jiný vlastní vektor tato transformace nemá;
(c) v ostatních případech každý vektor z L je vlastní vektor s vlastním číslem 1 a žádný jiný vlastní vektor neexistuje.

(7) Buď V vektorový prostor všech hladkých funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mají spojité derivace všech řádů) a buď $\delta\colon V \to V$, $\delta(f) = f'$ transformace, která funkci f přiřadí její derivaci f'. Z matematické analýzy víme, že pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R}$ platí $(\mathrm{e}^{\lambda x})' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$, čili funkce $\mathrm{e}^{\lambda x}$ a každý její skalární násobek jsou vlastní vektory transformace δ s vlastním číslem λ.

Buď $f \in V$ libovolná funkce s vlastností $f' = \lambda f$. Potom

$$\begin{aligned}(f(x)\mathrm{e}^{-\lambda x})' &= f'(x)\mathrm{e}^{-\lambda x} - f(x)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} = \\ &= \lambda f(x)\mathrm{e}^{-\lambda x} - f(x)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x} = \\ &= \lambda f(x)(\mathrm{e}^{-\lambda x} - \mathrm{e}^{-\lambda x}) = 0,\end{aligned}$$

čili funkce $f(x)\mathrm{e}^{-\lambda x}$ je konstantní. Označíme-li $f(x)\mathrm{e}^{-\lambda x} = c$, dostaneme $f(x) = c\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, takže každá funkce s vlastností $f' = \lambda f$ je skalární násobek funkce $\mathrm{e}^{\lambda x}$. To znamená, že každé reálné číslo λ je vlastní číslo transformace δ a příslušné vlastní vektory jsou všechny skalární násobky funkce $\mathrm{e}^{\lambda x}$. ∎

Cvičení. Určete všechny vlastní vektory následujících lineárních transformací vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$. Návod: Pomozte si geometrickou interpretací v Gaussově rovině.

(1) Zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^*$, kde z^* je číslo komplexně sdružené k číslu z.
(2) Zobrazení $\mathrm{re}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \mathrm{re}\, z = \frac{1}{2}(z + z^*)$ (reálná část čísla z). ▷

13.2. Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů

Tvrzení 13.2.1. *Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace. Potom*

(1) skalár λ je vlastní hodnota transformace f právě tehdy, když $f - \lambda\,\mathrm{id}_V$ není injektivní;
(2) množina všech vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě λ transformace f je podprostor prostoru V.

Důkaz. Buďte $v \in V$ a λ skalár. Následující vztahy jsou ekvivalentní:

$$\begin{aligned}f(v) &= \lambda v\\ f(v) &= (\lambda\,\mathrm{id}_V)(v)\\ f(v) - (\lambda\,\mathrm{id}_V)(v) &= 0\\ (f - \lambda\,\mathrm{id}_V)(v) &= 0\\ v &\in \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)\end{aligned}$$

Takže λ je vlastní hodnota právě tehdy, když v $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_V)$ existuje nenulový vektor, což podle Tvrzení 12.2.2 je právě tehdy, když $f - \lambda \operatorname{id}_V$ není injektivní.

Z uvedeného navíc vyplývá, že množina všech vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě λ transformace f je $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_V)$, což je podprostor prostoru V. □

Obdobné trvrzení platí i pro vlastní hodnoty a vlastní vektory matice.

Tvrzení 13.2.2. *Buď A čtvercová matice typu $n \times n$ nad polem P. Potom*

(1) skalár λ je vlastní hodnota matice A právě tehdy, když $\det(A - \lambda E_n) = 0$;
(2) množina všech vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě λ matice A je podprostor prostoru P^n.

Důkaz. Buďte $x \in P^n$ a λ skalár. Následující vztahy jsou ekvivalentní:

$$\begin{aligned}
Ax &= \lambda x \\
Ax &= \lambda E_n x \\
Ax - \lambda E_n x &= 0 \\
(A - \lambda E_n)x &= 0 \\
x &\in \operatorname{Ker}(A - \lambda E_n)
\end{aligned}$$

Takže λ je vlastní hodnota právě tehdy, když v $\operatorname{Ker}(A - \lambda E_n)$ existuje nenulový vektor, tedy homogenní soustava $(A - \lambda E_n)x = 0$ má nenulové řešení, a to má právě tehdy, když $\det(A - \lambda E_n) = 0$, čili matice $A - \lambda E_n$ je singulární.

Z uvedeného navíc vyplývá, že množina všech vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě λ matice A je množina všech řešení homogenní soustavy rovnic o n neznámých, což je podprostor prostoru P^n. □

Pro lineární zobrazení $f\colon U \to V$, bázi $u = (u_1, \dots, u_n)$ prostoru U a bázi $v = (v_1, \dots, v_m)$ prostoru V máme definovánu matici zobrazení f vzhledem k bázím u a v. Jedná-li se o lineární transformaci f, tedy $U = V$, a stejné báze, tedy $u = v$, budeme příslušnou matici stručněji nazývat *matice lineární transformace f vzhledem k bázi v*.

Vlastní hodnoty lineární transformace můžeme hledat jako vlastní hodnoty matice transformace.

Tvrzení 13.2.3. *Buďte V konečněrozměrný vektorový prostor nad polem P, $f\colon V \to V$ lineární transformace a A matice transformace f vzhledem k nějaké bázi prostoru V. Potom $\lambda \in P$ je vlastní hodnota transformace f právě tehdy, když λ je vlastní hodnota matice A.*

Důkaz. Tvrzení vyplývá z toho, že vektorům z V jsou jednoznačně přiřazeny jejich souřadnice (zobrazení přiřazující vektorům jejich souřadnice je izomorfismus), transformace f je určena svou maticí A a souřadnice obrazu $f(v)$ vektoru v o souřadnicích x jsou rovny součinu matic Ax, vše vzhledem k jedné bázi. □

Tvrzení 13.2.4. *Buď A čtvercová matice typu $n \times n$ nad polem P. Potom* $\det(A - \lambda E_n)$ *je polynom neurčité λ stupně n s koeficienty z pole P.*

Důkaz. Cvičení. □

Definice. Buď A čtvercová matice. Polynom

$$\chi_A = \det(A - \lambda E)$$

se nazývá *charakteristický polynom* matice A a rovnice

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

se nazývá *charakteristická rovnice* matice A.

Cvičení. Buď $\chi_A = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0$ charakteristický polynom matice A typu $n \times n$. Ukažte, že $c_n = (-1)^n$, $c_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$ a $c_0 = \det A$. $\triangleright$

Podle Tvrzení 13.2.2 je λ vlastní hodnota matice A právě tehdy, když je kořenem příslušného charakteristického polynomu. Vlastní vektory příslušné vlastní hodnotě λ získáme jako řešení soustavy lineárních rovnic $(A - \lambda E)x = 0$.

Tvrzení 13.2.5. *Čtvercová matice typu $n \times n$ má nejvýše n vlastních hodnot.*

Důkaz. Charakteristický polynom je stupně n a má tedy nejvýše n kořenů. $\square$

Vlastní hodnoty lineární transformace f tedy získáváme jako vlastní hodnoty matice A transformace f vzhledem k nějaké bázi, tedy jako kořeny charakteristického polynomu matice A. Při volbě jiné báze dostaneme jinou matici A' transformace f, jejíž vztah k A je $A' = QAQ^{-1}$, kde Q je matice přechodu mezi bázemi. Je otázkou, zda matice A a A' mají stejné charakteristické polynomy a tedy stejné vlastní hodnoty.

Definice. Buďte A, B čtvercové matice. Matice B je *podobná* matici A, jestliže existuje invertibilní matice Q taková, že $B = QAQ^{-1}$. Zapisujeme $B \approx A$.
Zobrazení $A \mapsto QAQ^{-1}$ se nazývá *podobnostní transformace.*

Cvičení. Dokažte, že relace $\approx$ je relace ekvivalence. $\triangleright$

Tvrzení 13.2.6. *Podobné matice mají stejné charakteristické polynomy.*

Důkaz. Nechť $B = QAQ^{-1}$. Potom

$$\begin{aligned}\chi_B &= \det(B - \lambda E) = \det(QAQ^{-1} - \lambda E) = \det(QAQ^{-1} - Q\lambda EQ^{-1}) = \\ &= \det(Q(A - \lambda E)Q^{-1}) = \det Q \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det Q^{-1} = \\ &= \det Q \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \frac{1}{\det Q} = \det(A - \lambda E) = \chi_A.\end{aligned}$$ $\square$

Díky předchozímu tvrzení můžeme pomocí charakteristického polynomu matice definovat charakteristický polynom lineární transformace konečněrozměrného prostoru.

Definice. Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace konečněrozměrného vektorového prostoru V. *Charakteristický polynom* χ_f transformace f je roven charakteristickému polynomu χ_A matice A transformace f vzhledem k libovolné bázi.

Díky Tvrzení 13.2.6 je předchozí definice korektní a kořeny charakteristického polynomu transformace f jsou všechny vlastní hodnoty transformace f.

Tvrzení 13.2.7. *Lineární transformace n-rozměrného vektorového prostoru má nejvýše n vlastních hodnot.*

Důkaz. Charakteristický polynom je stupně n a má tedy nejvýše n kořenů. $\square$

13.3. Diagonalizovatelné transformace

Definice. Lineární transformace konečněrozměrného prostoru je *diagonalizovatelná*, jestliže má vzhledem k nějaké bázi diagonální matici.

Tvrzení 13.3.1. *Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace konečněrozměrného vektorového prostoru V, $(v_1, \ldots, v_n)$ báze prostoru V a A matice transformace f vzhledem k uvedené bázi. Potom*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

právě tehdy, když $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní hodnoty transformace f a pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ vektor v_i je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_i.

Důkaz. □

Důsledek. *Lineární transformace konečněrozměrného prostoru je diagonalizovatelná právě tehdy, když existuje báze prostoru tvořená vlastními vektory transformace.*

Definice. Matice je *diagonalizovatelná*, jestliže je podobná diagonální matici.

Tvrzení 13.3.2. *Čtvercová matice A typu $n \times n$ nad polem P je diagonalizovatelná právě tehdy, když existuje báze prostoru P^n tvořená vlastními vektory matice A.*

Důkaz. □

Tvrzení 13.3.3. *Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace n-rozměrného vektorového prostoru V, $(v_1, \dots, v_n)$ báze prostoru V a A matice transformace f vzhledem k uvedené bázi. Potom transformace f je diagonalizovatelná právě tehdy, když matice A je diagonalizovatelná.*

Důkaz. □

Tvrzení 13.3.4. *Buďte $v_1, \dots, v_n$ nenulové vlastní vektory příslušné po řadě různým vlastním hodnotám $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nějaké lineární transformace. Potom množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá.*

Důkaz. □

Důsledek. *Má-li lineární transformace n-rozměrného prostoru n různých vlastních hodnot, potom je diagonalizovatelná.*

Důsledek. *Má-li čtvercová matice typu $n \times n$ n různých vlastních hodnot, potom je diagonalizovatelná.*

Příklad. Mějme $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + y, 3x + 4y)$ (ověřte, že f je lineární) a na $\mathbb{R}^2$ uvažujme kanonickou bázi.

Matici zobrazení získáme tak, že do sloupců budeme psát souřadnice obrazů vektorů báze (v tomto případě souřadnice jsou stejné jako vektory).

Obrazy bázových vektorů jsou $f(1, 0) = (2, 3)$, $f(0, 1) = (1, 4)$, takže matice zobrazení f je

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$$

a jeho kořeny, tedy vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$.

Podle předchozích tvrzení je matice A podobná matici

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Vlastní vektory získáme jako řešení soustavy lineárních rovnic $(A - \lambda E)x = 0$ pro jednotlivé vlastní hodnoty.

Pro $\lambda_1 = 1$ řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{tedy} \qquad \begin{aligned} x + y &= 0 \\ 3x + 3y &= 0 \end{aligned}.$$

Množina všech řešení této soustavy je $[\![(1,-1)]\!]$ a příslušné vlastní vektory jsou tedy všechny skalární násobky vektoru $v_1 = (1,-1)$. Vektor v_1 se skutečně zobrazí na svůj 1-násobek, $f(1,-1) = (1,-1)$.

Pro $\lambda_2 = 5$ řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{tedy} \qquad \begin{aligned} -3x + y &= 0 \\ 3x - y &= 0 \end{aligned} .$$

Množina všech řešení této soustavy je $[\![(1,3)]\!]$ a příslušné vlastní vektory jsou tedy všechny skalární násobky vektoru $v_2 = (1,3)$. Vektor v_2 se skutečně zobrazí na svůj 5-násobek, $f(1,3) = (5,15)$.

Podle Tvrzení 13.3.4 vektory v_1, v_2 tvoří „novou“ bázi prostoru $\mathbb{R}^2$.

Matice přechodu Q od kanonické báze k nové bázi (ve sloupcích jsou nové souřadnice vektorů kanonické báze) a matice k ní inverzní Q^{-1}, tedy matice přechodu od nové báze ke kanonické bázi (ve sloupcích jsou kanonické souřadnice vektorů nové báze) jsou

$$Q = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} .$$

A skutečně

$$A' = Q \cdot A \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

Poznámka. Při hledání vlastních vektorů tedy hledáme jádra lineárních transformací $f - \lambda \cdot \mathrm{id}$ pro jednotlivé hodnoty λ.

Pro $\lambda_1 = 1$ je $(f - \mathrm{id})(x,y) = (x+y, 3x+3y)$ a jádro tohoto zobrazení je

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = [\![(1,-1)]\!].$$

Pro $\lambda_2 = 5$ je $(f - 5\,\mathrm{id})(x,y) = (-3x+y, 3x-y)$ a jádro tohoto zobrazení je

$$\mathrm{Ker}(f - 5\,\mathrm{id}) = [\![(1,3)]\!].$$

■