12.4. Matice lineárního zobrazení

V příkladu (7) v 12.1 pro každou matici A typu $m \times n$ nad polem P je $f_A \colon P^n \to P^m$, $x \mapsto Ax$, lineární zobrazení.

Na druhou stranu, pro každé lineární zobrazení $f \colon P^n \to P^m$ existuje jediná matice A taková, že $f = f_A$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ buď e_i i-tý vektor kanonické báze P^n, tedy $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, kde 1 je na i-tém místě. Potom pro libovolné $x = (x^1, \dots, x^n) \in P^n$ platí

$$f(x) = f(x^1 e_1 + \dots + x^n e_n) = x^1 f(e_1) + \dots + x^n f(e_n).$$

Čili pro matici A, jejíž sloupce jsou $f(e_1), \dots, f(e_n)$, platí $f = f_A$.

Obdobně lze libovolnému lineárnímu zobrazení mezi konečněrozměrnými vektorovými prostory přiřadit matici, která toto zobrazení popisuje, a to sice matici reprezentující příslušné lineární zobrazení mezi prostory souřadnic vektorů vzhledem ke zvoleným bázím.

Definice. Buďte U, V vektorové prostory, $(u_1, \dots, u_n)$ báze U a $(v_1, \dots, v_m)$ báze V. Buď $f \colon U \to V$ lineární zobrazení. Matice A typu $m \times n$, jejíž i-tý sloupec je tvořen souřadnicemi vektoru $f(u_i) \in V$ v bázi $(v_1, \dots, v_m)$, se nazývá *matice lineárního zobrazení* f vzhledem k bázím $(u_1, \dots, u_n)$ a $(v_1, \dots, v_m)$.

Přesněji, A_i^j je j-tá souřadnice obrazu $f(u_i)$ v bázi $(v_1, \dots, v_m)$. Platí tedy

$$f(u_i) = \sum_j A_i^j v_j.$$

Tvrzení 12.4.1. *Buďte U, V vektorové prostory, $(u_1, \dots, u_n)$ báze U, $(v_1, \dots, v_m)$ báze V, $f \colon U \to V$ lineární zobrazení, $u \in U$, A matice f, $x = (x^1, \dots, x^n)$ souřadnice u, $y = (y^1, \dots, y^m)$ souřadnice $f(u) \in V$ vzhledem ke zvoleným bázím. Pak*

$$y = Ax.$$

Důkaz. Jelikož $u = \sum_i x^i u_i$, tak

$$\begin{aligned} f(u) &= f\left(\sum\nolimits_i x^i u_i\right) = \sum\nolimits_i f(x^i u_i) = \sum\nolimits_i x^i f(u_i) = \sum\nolimits_i x^i \sum\nolimits_j A_i^j v_j = \\ &= \sum\nolimits_j \sum\nolimits_i x^i A_i^j v_j. \end{aligned}$$

Čili j-tá souřadnice vektoru $f(u)$ v bázi $(v_1, \dots, v_m)$ je $y^j = \sum_i x^i A_i^j = \sum_i A_i^j x^i$, což je právě výsledek získávaný při násobení matic A a x. $\square$

Příklad. Mějme $\alpha \colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$, $f \mapsto f'$. Je to tedy zobrazení z prostoru polynomů stupně nejvýše 2 do prostoru polynomů stupně nejvýše 1, které polynomu přiřazuje jeho derivaci. Ověřte, že se jedná o lineární zobrazení.

V $\mathbb{R}_2[x]$ uvažujme bázi $(1, x, x^2)$ a v $\mathbb{R}_1[x]$ bázi $(1, x)$. Ověřte, že jsou to báze. Najdeme obrazy vektorů báze $(1, x, x^2)$ při zobrazení α a jejich souřadnice v bázi $(1, x)$.

$\alpha(1) = 0,$ souřadnice vektoru 0 v bázi $(1, x)$ jsou $(0, 0)$;

$\alpha(x) = 1,$ souřadnice vektoru 1 v bázi $(1, x)$ jsou $(1, 0)$;

$\alpha(x^2) = 2x,$ souřadnice vektoru $2x$ v bázi $(1, x)$ jsou $(0, 2)$.

Matice zobrazení α vzhledem k bázím $(1, x, x^2)$ a $(1, x)$ tedy je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Například, $\alpha(3x^2+2x+7) = 6x+2$. Vektor $3x^2+2x+7$ má v bázi $(1, x, x^2)$ souřadnice $x = (7, 2, 3)$ a vektor $6x + 2$ má v bázi $(1, x)$ souřadnice $y = (2, 6)$. Ověřte. A platí

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = y$$ ■

Příklad. Matice identického zobrazení $\mathrm{id}\colon U \to U$, $\mathrm{id}(u) = u$, vzhledem k bázím $(e_1, \dots, e_n)$ a $(e'_1, \dots, e'_n)$ (v tomto pořadí) je matice přechodu od báze $(e_1, \dots, e_n)$ k bázi $(e'_1, \dots, e'_n)$. ■

Tvrzení 12.4.2. *Buďte U, V, W vektorové prostory, $(u_1, \dots, u_m)$ báze U, $(v_1, \dots, v_n)$ báze V, $(w_1, \dots, w_p)$ báze W. Buďte $\alpha\colon U \to V$, $\beta\colon V \to W$ lineární zobrazení. Buď A matice zobrazení α vzhledem k bázím $(u_1, \dots, u_m)$ a $(v_1, \dots, v_n)$, buď B matice zobrazení β vzhledem k bázím $(v_1, \dots, v_n)$ a $(w_1, \dots, w_p)$. Potom BA je matice zobrazení $\beta \circ \alpha$ vzhledem k bázím $(u_1, \dots, u_m)$ a $(w_1, \dots, w_p)$.*

Důkaz. Jelikož $\alpha(u_i) = \sum_j A_i^j v_j$ a $\beta(v_j) = \sum_k B_j^k w_k$, tak

$$\begin{aligned}(\beta \circ \alpha)(u_i) &= \beta(\alpha(u_i)) = \beta\left(\sum\nolimits_j A_i^j v_j\right) = \sum\nolimits_j A_i^j \beta(v_j) = \sum\nolimits_j A_i^j \sum\nolimits_k B_j^k w_k = \\ &= \sum\nolimits_{j,k} A_i^j B_j^k w_k = \sum\nolimits_k \sum\nolimits_j A_i^j B_j^k w_k = \\ &= \left(\sum\nolimits_j A_i^j B_j^1\right) w_1 + \dots + \left(\sum\nolimits_j A_i^j B_j^p\right) w_p.\end{aligned}$$

Čili v k-tém řádku i-tého sloupce matice zobrazení $\beta \circ \alpha$ je $\sum_j A_i^j B_j^k = \sum_j B_j^k A_i^j$, což je totéž, co dostaneme při součinu $B \cdot A$. □

Tvrzení 12.4.3. *Buď α je izomorfismus a A jeho matice vzhledem k nějakým bázím. Pak A je invertibilní a A^{-1} je matice inverzního izomorfismu α^{-1}.*

Důkaz. Buď $\alpha\colon U \to V$ a buď B matice lineárního zobrazení $\alpha^{-1}\colon V \to U$ vzhledem k příslušným bázím. Matice lineárního zobrazení $\alpha^{-1} \circ \alpha = \mathrm{id}_U$ vzhledem k bázi prostoru U je jednotková matice E a podle předchozího tvrzení je to matice BA. Čili, $BA = E$. Analogicky $AB = E$. □

Důsledek. *Každá matice přechodu od báze k bázi je invertibilní.*

Důkaz. Podle uvedených definic matice přechodu je totéž co matice identity, což je izomorfismus. □

Tvrzení 12.4.4. *Buď U vektorový prostor se starou bází $(u_1, \dots, u_n)$ a novou bází $(u'_1, \dots, u'_n)$, buď Q matice přechodu od staré báze k nové bázi. Buď V vektorový prostor se starou bází $(v_1, \dots, v_m)$ a novou bází $(v'_1, \dots, v'_m)$, buď R matice přechodu od staré báze k nové bázi. Buď $\alpha\colon U \to V$ lineární zobrazení. Buď A matice zobrazení α vzhledem k bázím $(u_1, \dots, u_n)$ a $(v_1, \dots, v_m)$. Buď A' matice zobrazení α vzhledem k bázím $(u'_1, \dots, u'_n)$ a $(v'_1, \dots, v'_m)$. Pak*

$$A' = RAQ^{-1}.$$

Důkaz. Situaci můžeme znázornit diagramem

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{U} \\ (u_1, \dots, u_n)\end{array}} \arrow[r, "\alpha", "A"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_U"', "Q"] & \boxed{\begin{array}{c}\mathrm{V} \\ (v_1, \dots, v_m)\end{array}} \arrow[d, "\mathrm{id}_V"', "R"] \\
\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{U} \\ (u'_1, \dots, u'_n)\end{array}} \arrow[r, "\alpha", "A'"'] & \boxed{\begin{array}{c}\mathrm{V} \\ (v'_1, \dots, v'_m)\end{array}}
\end{tikzcd}$$

V rozích stojí vektorové prostory s vyznačenými bázemi, šipky označují lineární zobrazení a jsou u nich uvedeny také matice těchto zobrazení. Platí $\mathrm{id}_V \circ \alpha = \alpha \circ \mathrm{id}_U$ a také $\alpha = \mathrm{id}_V \circ \alpha \circ \mathrm{id}_U^{-1}$. Podle Tvrzení 12.4.2 o matici složeného zobrazení potom

$$A'Q = RA \quad \text{a také} \quad A' = RAQ^{-1}. \qquad \square$$

Příklad. Mějme $\alpha\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_1[x]$, $f \mapsto f'$. Je to tedy zobrazení z prostoru polynomů stupně nejvýše 2 do prostoru polynomů stupně nejvýše 1, které polynomu přiřazuje jeho derivaci.

(1) Nejprve uvažujme (staré) báze $(1, x, x^2)$ v $\mathbb{R}_2[x]$ a $(1, x)$ v $\mathbb{R}_1[x]$. Ověřte, že jsou to báze. Najdeme obrazy vektorů báze $(1, x, x^2)$ při zobrazení α a jejich souřadnice v bázi $(1, x)$.

$$\begin{aligned}
&\alpha(1) = 0, && \text{souřadnice vektoru } 0 \text{ v bázi } (1, x) \text{ jsou } (0, 0);\\
&\alpha(x) = 1, && \text{souřadnice vektoru } 1 \text{ v bázi } (1, x) \text{ jsou } (1, 0);\\
&\alpha(x^2) = 2x, && \text{souřadnice vektoru } 2x \text{ v bázi } (1, x) \text{ jsou } (0, 2).
\end{aligned}$$

Matice zobrazení α vzhledem k bázím $(1, x, x^2)$ a $(1, x)$ tedy je

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) Nyní uvažujme (nové) báze $(x^2, x + 1, x)$ v $\mathbb{R}_2[x]$ a $(x + 1, 1)$ v $\mathbb{R}_1[x]$. Ověřte, že jsou to báze. Najdeme obrazy vektorů báze $(x^2, x + 1, x)$ při zobrazení α a jejich souřadnice v bázi $(x + 1, 1)$.

$$\begin{aligned}
&\alpha(x^2) = 2x, && \text{souřadnice vektoru } 2x \text{ v bázi } (x+1, 1) \text{ jsou } (2, -2);\\
&\alpha(x+1) = 1, && \text{souřadnice vektoru } 1 \text{ v bázi } (x+1, 1) \text{ jsou } (0, 1);\\
&\alpha(x) = 1, && \text{souřadnice vektoru } 1 \text{ v bázi } (x+1, 1) \text{ jsou } (0, 1).
\end{aligned}$$

Matice zobrazení α vzhledem k bázím $(x^2, x + 1, x)$ a $(x + 1, 1)$ tedy je

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Například, $\alpha(3x^2 + 2x + 7) = 6x + 2$. Vektor $3x^2 + 2x + 7$ má staré souřadnice $x = (7, 2, 3)$ a nové souřadnice $x' = (3, 7, -5)$. Vektor $6x + 2$ má staré souřadnice $y = (2, 6)$ a nové souřadnice $y' = (6, -4)$. Ověřte. A platí

$$A_1 \cdot x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = y$$

a

$$A_2 \cdot x' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = y'.$$

Matice přechodu od staré báze $(1, x, x^2)$ k nové bázi $(x^2, x + 1, x)$ v $\mathbb{R}_2[x]$ je

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice přechodu od staré báze $(1, x)$ k nové bázi $(x + 1, 1)$ v $\mathbb{R}_1[x]$ je

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A platí

$$Q_2 \cdot A_1 \cdot Q_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A_2. \qquad \blacksquare$$

12.5. Algebraická struktura na množině lineárních zobrazení

Definice. Buďte U, V vektorové prostory nad polem P a $f, g\colon U \to V$ zobrazení.

(1) Zobrazení $f + g\colon U \to V$, zadané předpisem

$$(f+g)(u) = f(u) + g(u)$$

pro libovolný vektor $u \in U$, se nazývá *součet* zobrazení f a g.

(2) Buď $c \in P$. Zobrazení $cf\colon U \to V$, zadané předpisem

$$(cf)(u) = c \cdot f(u)$$

pro libovolný vektor $u \in U$, se nazývá *c-násobek* zobrazení f.

Tvrzení 12.5.1. *Buďte U, V vektorové prostory nad polem P, $f, g\colon U \to V$ lineární zobrazení a $c \in P$. Pak zobrazení $f + g$, cf jsou lineární.*

Důkaz. Cvičení. □

Buďte U, V vektorové prostory nad polem P. Množinu všech lineárních zobrazení z U do V označme $\mathrm{Hom}_P(U, V)$. Tedy

$$\mathrm{Hom}_P(U, V) = \{f\colon U \to V \mid f \text{ je lineární zobrazení nad polem } P\}.$$

Tvrzení 12.5.2. *Buďte U, V vektorové prostory nad polem P. Pak množina $\mathrm{Hom}_P(U, V)$ s operacemi sčítání zobrazení a násobení zobrazení skalárem je vektorový prostor nad polem P.*

Důkaz. Cvičení. □

Tvrzení 12.5.3. *Buďte U, V vektorové prostory nad polem P, $c \in P$, $f, g\colon U \to V$ lineární zobrazení a A, B jejich matice vzhledem ke zvoleným bázím. Pak*

(1) $A + B$ je matice lineárního zobrazení $f + g$ vzhledem ke stejným bázím,

(2) cA je matice lineárního zobrazení cf vzhledem ke stejným bázím.

Důkaz. Cvičení. □

Tvrzení 12.5.4. *Buďte U, V konečněrozměrné vektorové prostory nad polem P, $\dim U = n$ a $\dim V = m$. Pak vektorový prostor $\mathrm{Hom}_P(U, V)$ je izomorfní s prostorem $P^{m \times n}$ všech matic typu $m \times n$ nad polem P.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme tak, že najdeme příslušný izomorfismus. Buďte u báze U, v báze V a $\varphi\colon \mathrm{Hom}_P(U, V) \to P^{m \times n}$ zobrazení, které každému lineárnímu zobrazení $f\colon U \to V$ přiřadí jeho matici vzhledem k bázím u a v.

Potom φ je bijekce, protože každá matice typu $m \times n$ je maticí právě jednoho lineárního zobrazení $U \to V$ vzhledem k uvedeným bázím (ověřte podrobně). Navíc, podle předchozího tvrzení φ je lineární, protože matice zobrazení $f + g$ je součet matic jednotlivých zobrazení f a g a matice zobrazení cf je c-násobek matice zobrazení f. □

Lineární zobrazení $V \to V$ se nazývá *lineární transformace* vektorového prostoru V nebo také *lineární operátor* na vektorovém prostoru V.

Na množině $\mathrm{Hom}_P(V,V)$ můžeme navíc uvažovat binární operaci $\circ$ skládání lineárních transformací s neutrálním prvkem id_V (množina s asociativní binární operací s neutrálním prvkem se nazývá *monoid*).

Tvrzení 12.5.5. *Buď V vektorový prostor nad polem P. Pak pro libovolná $f, g, h \in \mathrm{Hom}_P(V,V)$ a $c \in P$ platí*

$$\begin{aligned} &f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h, \\ &(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h, \\ &f \circ (cg) = (cf) \circ g = c(f \circ g). \end{aligned}$$

Důkaz. Cvičení. □

Algebraická struktura, která je současně monoid i vektorový prostor nad polem P a platí pro ni identity uvedené v předchozím tvrzení, se nazývá *asociativní P-algebra.* Tudíž, $\mathrm{Hom}_P(V,V)$ je asociativní P-algebra.

Jiný příklad asociativní P-algebry je množina $P^{n\times n}(=\mathrm{gl}(n,P))$ všech čtvercových matic typu $n \times n$ nad polem P vzhledem k binárním operacím násobení a sčítání matic a k operaci násobení skalárem (ověřte).

Podle předchozích tvrzení v konečněrozměrném případě P-algebra $\mathrm{Hom}_P(V,V)$ je izomorfní P-algebře $\mathrm{gl}(n,P)$.

Pro libovolné celé nezáporné číslo k zaveďme lineární transformaci $f^k \colon V \to V$ předpisem

$$f^k(v) = \underbrace{f(f(\cdots f}_{k}(v)\cdots)) \text{ pro libovolné } v \in V, \text{ tj. } f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k}.$$

Tedy, $f^0 = \mathrm{id}_V$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$ a $f^{n+1} = f \circ f^n$.

Definice. Buď $p = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 \in P[x]$ polynom. Buď $f\colon V \to V$ lineární transformace vektorového prostoru V nad polem P a A čtvercová matice nad polem P. Položme

$$\begin{aligned} p(f) &= a_m f^m + \cdots + a_1 f + a_0\,\mathrm{id}_V, \\ p(A) &= a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 E, \end{aligned}$$

kde E je jednotková matice stejného rozměru jako matice A.

Říkáme, že lineární transformace $p(f)$, resp. matice $p(A)$ vznikla dosazením lineární transformace f, resp. matice A do polynomu p. Hodnota transformace $p(f)$ ve vektoru $v \in V$ se zapisuje $p(f)(v)$.

Příklad. Nechť $p = x^2 - 2x + 2$. Pak pro libovolnou lineární transformaci $f\colon V \to V$ máme $p(f) = f^2 - 2f + 2\,\mathrm{id}$ a pro libovolný vektor $v \in V$ máme $p(f)(v) = f(f(v)) - 2f(v) + 2v$. ■

Tvrzení 12.5.6. *Buď p polynom a buď A matice lineární transformace f vzhledem k nějaké bázi. Pak $p(A)$ je matice lineární transformace $p(f)$ vzhledem k téže bázi.*

Důkaz. Cvičení. □

Tvrzení 12.5.7. *Buďte p, q polynomy. Pro libovolnou lineární transformaci f a libovolnou čtvercovou matici A platí*

$$\begin{aligned} &(p+q)(f) = p(f) + q(f), \qquad &&(pq)(f) = p(f) \circ q(f), \\ &(p+q)(A) = p(A) + q(A), &&(pq)(A) = p(A)q(A). \end{aligned}$$

Důkaz. Cvičení. □

Důsledek. *Buďte p, q polynomy. Pro libovolnou lineární transformaci f a pro libovolnou čtvercovou matici A platí*

$$p(f) \circ q(f) = q(f) \circ p(f), \qquad p(A)q(A) = q(A)p(A)$$

(říkáme, že $p(f)$ a $q(f)$ komutují a $p(A)$ a $q(A)$ komutují).