4. přednáška, 16. 3. 2021

10.5. Přímý součet vektorových prostorů

Definice. Buďte $V_1, \dots, V_n$ vektorové prostory nad polem P. Na kartézském součinu $V_1 \times \cdots \times V_n$ zaveďme sčítání a násobení skalárem předpisem

$$\begin{aligned}&(u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n),\\ &p(u_1, \dots, u_n) = (pu_1, \dots, pu_n)\end{aligned}$$

pro libovolné $(u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$ a $p \in P$.

Na $V_1 \times \cdots \times V_n$ tak dostaneme strukturu vektorového prostoru nad polem P, který se značí $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ a nazývá se *přímý součet* vektorových prostorů $V_1, \dots, V_n$.

Cvičení. Ověřte, že $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ je vektorový prostor. $\triangleright$

Tvrzení 10.5.1. *Buďte $V_1, \dots, V_n$ konečněrozměrné vektorové prostory. Pak*

$$\dim(V_1 \oplus \cdots \oplus V_n) = \dim V_1 + \cdots + \dim V_n.$$

Důkaz. Pro každé i nechť $(e^i_1, \dots, e^i_{m_i})$ je báze V_i. Potom

$$\begin{aligned}&((e^1_1, 0, \dots, 0), \dots, (e^1_{m_1}, 0, \dots, 0),\\ &\ (0, e^2_1, 0, \dots, 0), \dots, (0, e^2_{m_2}, 0, \dots, 0),\\ &\ \dots,\\ &\ (0, \dots, 0, e^n_1), \dots, (0, \dots, 0, e^n_{m_n}))\end{aligned}$$

je báze $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ (cvičení). $\square$

Příklad. Buď $V_1 = \mathbb{R}$ a $V_2 = \mathbb{R}^2$. Potom $V_1 \times V_2$ je množina $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ uspořádaných dvojic (x, y), kde $x \in \mathbb{R}$ a $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, tedy $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \{(x, (y_1, y_2)) \mid x \in \mathbb{R}, (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2\}$. Například

$$\begin{aligned}&(1, (2, 3)) + (2, (1, -1)) = (1 + 2, (2, 3) + (1, -1)) = (3, (3, 2)),\\ &3 \cdot (2, (1, 4)) = (3 \cdot 2, 3 \cdot (1, 4)) = (6, (3, 12)).\end{aligned}$$

Buď $e^1 = (1)$ báze $\mathbb{R}$ a buď $e^2 = (e^2_1, e^2_2) = ((1, 0), (0, 1))$ báze $\mathbb{R}^2$. Potom trojice

$$((e^1, 0), (0, e^2_1), (0, e^2_2)) = ((1, (0, 0)), (0, (1, 0)), (0, (0, 1)))$$

je báze $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$ a $\dim(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2) = 3 = \dim \mathbb{R} + \dim \mathbb{R}^2 = 1 + 2$. $\blacksquare$

11. Vektorové podprostory

11.1. Definice, příklady, základní vlastnosti

Definice. Buďte V vektorový prostor nad polem P a $U \subseteq V$. U je *vektorový podprostor*, jestliže platí

(i) $0 \in U$;
(ii) $u_1 + u_2 \in U$ pro každé $u_1, u_2 \in U$ (uzavřenost na sčítání);
(iii) $pu \in U$ pro každé $u \in U$ a každé $p \in P$ (uzavřenost na násobení skalárem).

Podle (iii) pro každý vektor $u \in U$ máme $-u = (-1) \cdot u \in U$, čili s každým vektorem leží v U i vektor k němu opačný. To spolu s (i) a (ii) znamená, že podprostor je podgrupa abelovské grupy $(V, +, 0, -)$.

Axiomy vektorového prostoru jsou splněny na V a tím spíše na U (cvičení). Tudíž, podobně jako u ostatních algebraických podstruktur, podprostor je sám též vektorovým prostorem.

Příklad. (1) V každém vektorovém prostoru je nulový podprostor obsahující jen nulový vektor.

(2) Každý prostor je sám svým podprostorem.

(3) $\mathbb{R}$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad polem $\mathbb{R}$ (ověřte).

(4) $\{(a, 0) |\ a \in \mathbb{R}\}$ je podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ nad polem $\mathbb{R}$ (ověřte).

(5) Množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic o n neznámých nad polem P je podprostor P^n. ■

Mnoho dalších příkladů můžeme získat jako lineární obaly.

Tvrzení 11.1.1. *Buď W podmnožina vektorového prostoru V nad polem P. Pak platí:*

(1) $[\![W]\!]$ je podprostor prostoru V.
(2) Je-li U podprostor V obsahující W, pak $[\![W]\!] \subseteq U$.

Důkaz. (1) Ukážeme, že množina $[\![W]\!]$ splňuje podmínky (i)–(iii) z definice vektorového podprostoru. Podmínka (i): Pro libovolný vektor $v \in W$ je $0 = 0v \in [\![W]\!]$. Podmínka (ii): Jsou-li $u, v \in [\![W]\!]$, potom $u = x_1u_1 + \cdots + x_mu_m$ a $v = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n$ pro nějaké $x_i, y_j \in P$, $u_i, v_j \in W$ a $m, n \in \mathbb{N}$. Tedy $u + v = x_1u_1 + \cdots + x_mu_m + y_1v_1 + \cdots + y_nv_n \in [\![W]\!]$. Podmínka (iii): Cvičení.

(2) Buď $w \in [\![W]\!]$, tedy $w = x_1w_1 + \cdots + x_nw_n$ pro nějaké $x_i \in P$, $w_i \in W$ a $n \in \mathbb{N}$. Jelikož $W \subseteq U$, všechny vektory w_i jsou prvky U, a jelikož U je vektorový podprostor, tedy uzavřený na násobení skalárem a sčítání vektorů, $w \in [\![W]\!]$. □

Tudíž, $[\![W]\!]$ je nejmenší podprostor prostoru V obsahující množinu W.

Tvrzení 11.1.2. *Libovolný podprostor konečněrozměrného vektorového prostoru je konečněrozměrný.*

Důkaz. Buď V konečněrozměrný prostor, $\dim V = n$, buď $U \subset V$ podprostor. Zkonstruujeme bázi postupem, který jsme použili při doplňování lineárně nezávislé množiny vektorů do báze v důkazu druhého Důsledku Tvrzení 10.3.3.

0-tý krok: Je-li U nulový prostor, jsme hotovi (U je 0-rozměrný).
1-ní krok: Když $U \neq \{0\}$, pak existuje vektor $u_1 \in U \setminus \{0\}$. Je-li $U = [\![u_1]\!]$, pak jsme hotovi (U je 1-rozměrný).
k-tý krok: Když $U \neq [\![u_1, \ldots, u_{k-1}]\!]$, pak existuje vektor $u_k \in U \setminus [\![u_1, \ldots, u_{k-1}]\!]$. Je-li $U = [\![u_1, \ldots, u_k]\!]$, pak jsme hotovi ($U$ je k-rozměrný).

Množina $\{u_1, \ldots, u_k\}$ je lineárně nezávislá, protože žádný z jejích vektorů není lineární kombinací předchozích (podle konstrukce $u_i \notin [\![u_1, \ldots, u_{i-1}]\!]$). Podle Tvrzení 10.2.5 lineárně nezávislá množina nemá více prvků než množina generátorů, takže pro nějaké $m \le n$ dostaneme $U = [\![u_1, \ldots, u_m]\!]$. □

Důsledek. *Vektorový prostor, který má nekonečněrozměrný podprostor, je nekonečněrozměrný.*

Příklad. Prostor $C^r\mathbb{R}$ všech funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spojitých se všemi derivacemi až do řádu r včetně, je nekonečněrozměrný, protože obsahuje podprostor polynomů $\mathbb{R}[x]$, který je nekonečněrozměrný. ■

Tvrzení 11.1.3. *Buď V konečněrozměrný vektorový prostor, buď U jeho podprostor. Jestliže $\dim U = \dim V$, pak $U = V$.*

Důkaz. Buď $(u_1, \ldots, u_n)$ libovolná báze U. Předpokládejme, že $U \ne V$, tedy že existuje vektor $v \in V \setminus U$. V prostoru V tak máme $(n+1)$-prvkovou lineárně nezávislou množinu vektorů $\{u_1, \ldots, u_n, v\}$ (žádný z nich není lineární kombinací předchozích: vektory u_i protože jsou bázové, vektor v proto, že jinak by ležel v U). Tedy $\dim V \ge n + 1 > n = \dim U$. □

Příklad. (1) Podprostory $\mathbb{R}$.

(2) Podprostory $\mathbb{R}^2$.

(3) Podprostory $\mathbb{R}^3$. ■

11.2. Průnik a součet podprostorů

Tvrzení 11.2.1. *Buďte U_1, U_2 podprostory V. Pak $U_1 \cap U_2$ je podprostor V.*

Důkaz. Ukážeme, že množina $U_1 \cap U_2$ splňuje podmínky (i)–(iii) z definice vektorového podprostoru. Podmínka (i): $0 \in U_1 \cap U_2$, protože $0 \in U_1$ a $0 \in U_2$. Podmínka (ii): Nechť $u_1, u_2 \in U_1 \cap U_2$. Pak $u_1, u_2 \in U_1$, takže $u_1 + u_2 \in U_1$, a zároveň $u_1, u_2 \in U_2$, takže $u_1 + u_2 \in U_2$. Tudíž, $u_1 + u_2 \in U_1 \cap U_2$. Podmínka (iii): Cvičení. □

Cvičení. Průnik libovolného systému podprostorů je podprostor. ▷

Definice. Buďte U_1, U_2 podprostory V. Označme

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 |\ u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}.$$

Množina $U_1 + U_2$ se nazývá *součet* podprostorů $U_1 + U_2$.

Prvky množiny $U_1 + U_2$ jsou všechny vektory $v \in V$, pro něž existuje vyjádření $v = u_1 + u_2$, kde $u_1 \in U_1$ a $u_2 \in U_2$.

Tvrzení 11.2.2. *Buďte U_1, U_2 podprostory V. Pak $U_1 + U_2$ je podprostor V.*

Důkaz. Ukážeme, že množina $U_1 + U_2$ splňuje podmínky (i)–(iii) z definice vektorového podprostoru. Podmínka (i): $0 = 0 + 0 \in U_1 + U_2$, kde $0 \in U_1$ a $0 \in U_2$. Podmínka (ii): Nechť $u, v \in U_1 + U_2$. Pak $u = u_1 + u_2$ a $v = v_1 + v_2$, kde $u_1, v_1 \in U_1$, $u_2, v_2 \in U_2$, načež $u + v = u_1 + u_2 + v_1 + v_2 = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \in U_1 + U_2$. Podmínka (iii): Cvičení. □

Cvičení. Dokažte, že (1) $U_1, U_2 \subseteq U_1 + U_2$.

(2) Je-li U podprostor ve V takový, že $U_1 \subseteq U$ a $U_2 \subseteq U$, pak $U_1 + U_2 \subseteq U$.

Návod: (1) Je-li $u_1 \in U_1$ libovolný prvek, pak $u_1 = u_1 + 0 \in U_1 + U_2$.

(2) Buď $u_1 + u_2$ obecný vektor z $U_1 + U_2$, $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$. Protože $U_1, U_2 \subseteq U$, máme $u_1, u_2 \in U$, načež $u_1 + u_2 \in U$.

Množina $S(V)$ všech podprostorů vektorového prostoru V je uspořádána inkluzí $\subseteq$. Z dokázaných tvrzení o průnicích a součtech podprostorů plyne, že množina $S(V)$ je svazově uspořádána, přičemž infimem je průnik a supremem je součet podprostorů. Tudíž, $(S(V), \cap, +)$ je svaz. Tento svaz není obecně ani distributivní, ani komplementární. $\triangleright$

Tvrzení 11.2.3. *Buďte U_1, U_2 konečněrozměrné podprostory jednoho vektorového prostoru. Pak*

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2).$$

Důkaz. Označme $\dim U_1 = n_1$, $\dim U_2 = n_2$ a $\dim(U_1 \cap U_2) = m$. Buď $\{u_1, \ldots, u_m\}$ báze v $U_1 \cap U_2$. To je lineárně nezávislá množina vektorů v U_1 i v U_2 a můžeme ji tedy v obou prostorech doplnit do báze vektory $u^1_1, \ldots, u^1_{n_1-m}$ resp. $u^2_1, \ldots, u^2_{n_2-m}$. Ukažme, že $\{u_1, \ldots, u_m, u^1_1, \ldots, u^1_{n_1-m}, u^2_1, \ldots, u^2_{n_2-m}\}$ je báze v $U_1 + U_2$.

Nejdříve ukážeme, že množina $\{u_1, \ldots, u_m, u^1_1, \ldots, u^1_{n_1-m}, u^2_1, \ldots, u^2_{n_2-m}\}$ je lineárně nezávislá. Nechť

$$c_1u_1 + \cdots + c_mu_m + c^1_1u^1_1 + \cdots + c^1_{n_1-m}u^1_{n_1-m} + c^2_1u^2_1 + \cdots + c^2_{n_2-m}u^2_{n_2-m} = 0$$

pro nějaké skaláry $c_1, \ldots, c_m, c^1_1, \ldots, c^1_{n_1-m}, c^2_1, \ldots, c^2_{n_2-m} \in P$. Pak

$$c_1u_1 + \cdots + c_mu_m + c^1_1u^1_1 + \cdots + c^1_{n_1-m}u^1_{n_1-m} = -c^2_1u^2_1 - \cdots - c^2_{n_2-m}u^2_{n_2-m},$$

kde na levé straně je prvek z U_1 a na pravé prvek z U_2, ale protože jsou si rovny, leží v $U_1 \cap U_2$, a lze je jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinace vektorů $u_1, \ldots, u_m$. Vyjádřeme tak vektor na pravé straně: existují skaláry $x_1, \ldots, x_m \in P$ takové, že

$$x_1u_1 + \cdots + x_mu_m = -c^2_1u^2_1 - \cdots - c^2_{n_2-m}u^2_{n_2-m}.$$

Z nezávislosti množiny $\{u_1, \ldots, u_m, u^2_1, \ldots, u^2_{n_2-m}\}$ (je to báze v U_2) plyne, že

$$x_1 = \cdots = x_m = c^2_1 = \cdots = c^2_{n_2-m} = 0.$$

Odtud

$$c_1u_1 + \cdots + c_mu_m + c^1_1u^1_1 + \cdots + c^1_{n_1-m}u^1_{n_1-m} = 0,$$

a z nezávislosti množiny $\{u_1, \ldots, u_m, u^1_1, \ldots, u^1_{n_1-m}\}$ (je to báze v U_1) plyne, že

$$c_1 = \cdots = c_m = c^1_1 = \cdots = c^1_{n_1-m} = 0.$$

Všechny koeficienty $c_1, \ldots, c_m, c^1_1, \ldots, c^1_{n_1-m}, c^2_1, \ldots, c^2_{n_2-m}$ jsou tedy nulové, takže množina $\{u_1, \ldots, u_m, u^1_1, \ldots, u^1_{n_1-m}, u^2_1, \ldots, u^2_{n_2-m}\}$ je lineárně nezávislá.

Snadno se dokáže, že vektory $u_1, \ldots, u_m, u^1_1, \ldots, u^1_{n_1-m}, u^2_1, \ldots, u^2_{n_2-m}$ generují $U_1 + U_2$ (cvičení).

Máme tedy bázi v $U_1 + U_2$ o $m + (n_1 - m) + (n_2 - m) = n_1 + n_2 - m$ vektorech, takže $\dim(U_1 + U_2) = n_1 + n_2 - m = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$. $\square$

Příklad. V prostoru E^3 buď $U \subset E^3$ nějaká rovina procházející počátkem a $L \subset E^3$ libovolná přímka procházející počátkem a neležící v U. Pak U je podprostor a podobně L je podprostor, přičemž evidentně $U \cap L = \{0\}$. Proto $\dim(U + L) = \dim U + \dim L - \dim(U \cap L) = 2 + 1 - 0 = 3 = \dim E^3$. Tudíž, $E^3 = U + L$ a každý vektor $v \in E^3$ je součtem $v = u + l$, kde $u \in U$ a $l \in L$. Jak najdeme vektory u, l, je-li dán vektor v? $\blacksquare$

Cvičení. Buďte U_1, U_2 podprostory ve vektorovém prostoru V, nechť $\dim U_1 + \dim U_2 > \dim V$. Ukažte, že existuje nenulový vektor $u \in U_1 \cap U_2$. $\triangleright$

Cvičení. Ukažte, že $[\![u_1, \ldots, u_n]\!] + [\![v_1, \ldots, v_m]\!] = [\![u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m]\!]$. $\triangleright$

Definici součtu podprostorů lze snadno rozšířit na libovolný konečný počet sčítanců:

$$U_1 + \cdots + U_n = \{u_1 + \cdots + u_n |\ u_1 \in U_1, \ldots, u_n \in U_n\}.$$

Vektor $v \in V$ tedy leží v $U_1 + \cdots + U_n$ právě tehdy, když jej lze zapsat jako součet $v = u_1 + \cdots + u_n$, přičemž $u_1 \in U_1, \ldots, u_n \in U_n$.

11.3. Přímý součet podprostorů

Definice. Buď V vektorový prostor nad polem P, buďte $U_1, \dots, U_n$ podprostory V. Součet $U_1 + \dots + U_n$ se nazývá *přímý*, jestliže každý vektor $v \in U_1 + \dots + U_n$ lze zapsat *právě jedním způsobem* jako součet $v = u_1 + \dots + u_n$, kde $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$. Přímý součet zapisujeme s tečkami: $U_1 \dot{+} \cdots \dot{+} U_n$.

Příklad. Nechť $U_1 = \{(x, 0, 0) |\ x \in P\}$, $U_2 = \{(0, y, 0) |\ y \in P\}$, $U_3 = \{(0, 0, z) |\ z \in P\}$. Pak $P^3 = U_1 \dot{+} U_2 \dot{+} U_3$, protože libovolný vektor $u = (x, y, z) \in P^3$ má jediné vyjádření ve tvaru součtu $u = u_1 + u_2 + u_3$, kde $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, u_3 \in U_3$, a sice $(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)$. ■

Tvrzení 11.3.1. *Buďte U_1, U_2 podprostory V. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $V = U_1 \dot{+} U_2$;
(ii) $V = U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2 = 0$.

Důkaz. (i) ⇒ (ii): Je-li $V = U_1 \dot{+} U_2$, pak každý vektor $v \in V$ lze vyjádřit jako součet $v = u_1 + u_2$, kde $u_1 \in U_1$ a $u_2 \in U_2$, čili $V = U_1 + U_2$. Ukažme, že $U_1 \cap U_2 = 0$. Buď $v \in U_1 \cap U_2$. Pak máme dva rozklady vektoru v na sčítance z U_1 a U_2, a sice $v = 0 + v$ a $v = v + 0$. Totožnost obou rozkladů znamená, že $v = 0$.

(ii) ⇒ (i): Je-li $V = U_1 + U_2$, pak každý vektor $v \in V$ lze vyjádřit jako součet $v = u_1 + u_2$, kde $u_1 \in U_1$ a $u_2 \in U_2$. Dokážeme ještě jednoznačnost vektorů u_1, u_2: Pokud je u_1', u_2' jiná dvojice vektorů taková, že $v = u_1' + u_2'$, pak

$$0 = v - v = (u_1 - u_1') + (u_2 - u_2'),$$

a tedy $u_1 - u_1' = -(u_2 - u_2')$. Vektor $u_1 - u_1' \in U_1$ je roven vektoru $-(u_2 - u_2') \in U_2$, proto leží v průniku $U_1 \cap U_2$, což je nulový prostor. Tudíž, $u_1 - u_1' = 0$ a $u_2 - u_2' = 0$. □

Příklad. (1) $V = V \dot{+} 0$ pro libovolný vektorový prostor V.

(2) Prostor E^3 je přímým součtem $U \dot{+} L$, je-li $U \subset E^3$ libovolná rovina procházející počátkem a $L \subset E^3$ libovolná přímka procházející počátkem a neležící v U. ■

V případě konečněrozměrných podprostorů máme jednoduché kritérium.

Tvrzení 11.3.2. *Buďte U_1, U_2 podprostory konečněrozměrného vektorového prostoru V takové, že $V = U_1 + U_2$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $V = U_1 \dot{+} U_2$;
(ii) $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$.

Důkaz. (i) ⇒ (ii): $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

(ii) ⇒ (i): Nechť $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$. Potom $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim V = 0$, čili $U_1 \cap U_2 = 0$. □

Cvičení. Buďte $V = U_1 \dot{+} U_2$, $(e_1^1, \dots, e_{m_1}^1)$ báze podprostoru U_1, $(e_1^2, \dots, e_{m_2}^2)$ báze podprostoru U_2. Pak $(e_1^1, \dots, e_{m_1}^1, e_1^2, \dots, e_{m_2}^2)$ je báze prostoru V. Dokažte. ▷

Cvičení. Buď $m < n$, buď $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$ báze vektorového prostoru V. Pak $V = [\![e_1, \dots, e_m]\!] \dot{+} [\![e_{m+1}, \dots, e_n]\!]$. Dokažte. ▷

Vzniká otázka, jak jednoduše rozeznat přímý součet n podprostorů při $n > 2$. Mohlo by se zdát, že prostor V je přímým součtem podprostorů $U_1, \dots, U_n$, jestliže je jejich součtem a podprostory $U_1, \dots, U_n$ mají po dvou nulový průnik. Následující příklad ukazuje, že to tak není:

Příklad. Prostor E^3 není přímým součtem $L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} U$, je-li U rovina procházející počátkem a jsou-li $L_1, L_2 \subset E^3$ různé přímky procházející počátkem, neležící v rovině U.

Skutečně, součet L_1+L_2 je sice přímý, ale má nenulový průnik s rovinou U. Libovolný nenulový vektor $u = l_1 + l_2$ ležící v průniku $(L_1 + L_2) \cap U$ pak má dvojí vyjádření: jako součet $l_1 + l_2 + 0$ a jako součet $0 + 0 + u$. ■

Tvrzení 11.3.3. *Buďte $U_1, \dots, U_n \subseteq V$ podprostory takové, že $V = U_1 + \cdots + U_n$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $V = U_1 \dot{+} U_2 \dot{+} \cdots \dot{+} U_n$;

(ii) $U_1 \cap U_2 = 0$, $(U_1 + U_2) \cap U_3 = 0$, $\dots$, $(U_1 + \cdots U_{n-1}) \cap U_n = 0$.

Je-li navíc prostor V konečněrozměrný, pak je s nimi ekvivalentní i podmínka

(iii) $\dim V = \dim U_1 + \cdots + \dim U_n$.

Důkaz. Cvičení. □

Jsou-li $U_1, \dots, U_n$ podprostory nějakého vektorového prostoru V, pak mohou existovat dva různé přímé součty, $U_1 \dot{+} \cdots \dot{+} U_n$ a $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$. První z nich je podprostor V, kdežto druhý není. Nicméně, oba přímé součty jsou izomorfní, což plyne z tvrzení uvedeného později v kapitole o lineárních zobrazeních.

Příklad. Buďte $V = \mathbb{R}^3$, $U_1 = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ a $U_2 = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Potom

$U_1 \dot{+} U_2 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ je podprostor $\mathbb{R}^3$,

$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ je báze $U_1 \dot{+} U_2$ a

$\dim(U_1 \dot{+} U_2) = 2$.

$U_1 \oplus U_2 = \{((x, 0, 0), (0, y, 0)) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ není podprostor $\mathbb{R}^3$,

$\{((1, 0, 0), (0, 0, 0)), ((0, 0, 0), (0, 1, 0))\}$ je báze $U_1 \oplus U_2$ a

$\dim(U_1 \oplus U_2) = 2$. ■