3. přednáška, 9. 3. 2021

Lemma 10.2.6 (Lemma o výměně)**.** *Buďte* $v_1, \dots, v_n \in V$ *a* $u = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$. *Pak pro každé* i *takové, že* $a_i \neq 0$, *platí* $[\![v_1, \dots, v_n]\!] = [\![v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_n]\!]$.

Důkaz. Předpokládejme, že $a_1 \neq 0$ (pro jiné indexy je důkaz stejný). Potom

$$v_1 = \frac{1}{a_1}u - \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{a_1}v_i.$$

Buď $w \in [\![v_1, \dots, v_n]\!]$. Existují tedy $b_1, b_2, \dots, b_n$ takové, že

$$\begin{aligned} w &= b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_nv_n = \\ &= \frac{b_1}{a_1}u - \sum_{i=2}^{n} \frac{b_1a_i}{a_1}v_i + b_2v_2 + \dots + b_nv_n = \\ &= \frac{b_1}{a_1}u + \sum_{i=2}^{n}(b_i - b_1a_ia_1^{-1})v_i \in [\![u, v_2, \dots, v_n]\!]. \end{aligned}$$

Buď $w \in [\![u, v_2, \dots, v_n]\!]$. Existují tedy $c_1, c_2, \dots, c_n$ takové, že

$$\begin{aligned} w &= c_1u + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = \\ &= c_1\sum_{i=1}^{n} a_iv_i + \sum_{i=2}^{n} c_iv_i = \\ &= c_1a_1v_1 + \sum_{i=2}^{n}(c_1a_i + c_i)v_i \in [\![v_1, \dots, v_n]\!]. \end{aligned}$$ □

Tvrzení 10.2.7 (Steinitzova věta o výměně)**.** *Nechť vektory* $v_1, \dots, v_n$ *generují prostor* V *a* $\{u_1, \dots, u_m\} \subset V$ *je lineárně nezávislá. Pak* $m \leq n$ *a existují indexy* $i_1, \dots, i_{n-m} \in \{1, \dots, n\}$ *takové, že*

$$[\![v_1, \dots, v_n]\!] = [\![u_1, \dots, u_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-m}}]\!].$$

Důkaz. Množina $\{u_1, \dots, u_m\}$ je lineárně nezávislá, takže všechny u_i jsou nenulové. Vektor u_1 je lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_n$ s aspoň jedním nenulovým koeficientem a stejně jako v předchozím důkazu předpokládejme, že nenulový koeficient je u v_1. Z Lemmatu o výměně dostaneme $[\![v_1, v_2, \dots, v_n]\!] = [\![u_1, v_2, \dots, v_n]\!]$.

Potom vektor u_2 je lineární kombinací vektorů $u_1, v_2, \dots, v_n$ s aspoň jedním nenulovým koeficientem u vektorů $v_2, \dots, v_n$ (jinak by byla množina $\{u_1, u_2\}$ lineárně závislá). Opět pro jednoduchost předpokládejme, že nenulový koeficient je u v_2. Z Lemmatu o výměně dostaneme $[\![u_1, v_2, \dots, v_n]\!] = [\![u_1, u_2, v_3, \dots, v_n]\!]$.

Takto pokračujeme, dokud buď nepoužijeme všechny vektory $u_1, \dots, u_m$ nebo nevyměníme všechny vektory $v_1, \dots, v_n$ za vektory $u_1, \dots, u_n$. Kdyby bylo $m > n$, vektory $u_{n+1}, \dots, u_m$ by byly lineární kombinace vektorů $u_1, u_2, \dots, u_n$ ve sporu s lineární nezávislostí množiny $\{u_1, \dots, u_m\}$. Takže $m \leq n$ a $[\![v_1, \dots, v_n]\!] = [\![u_1, \dots, u_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-m}}]\!]$. □

10.3. Báze

Definice. *Báze* vektorového prostoru je libovolná uspořádaná lineárně nezávislá množina jeho generátorů.

Obvykle tedy budeme bázi vektorového prostoru zapisovat jako uspořádanou n-tici vektorů. Pokud nebude záležet na uspořádání vektorů v bázi, budeme ji někdy zapisovat jen jako množinu vektorů.

Příklad. (1) (6) je báze $\mathbb{R}$.

(2) $((1,0),(0,1))$ je báze $\mathbb{R}^2$.

(3) $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ je báze $\mathbb{R}^3$.

(4) Pro každé $i \in \{1,\dots,n\}$ buď e_i vektor z $\mathbb{R}^n$, který má na i-tém místě jedničku a jinde nuly. Potom $(e_1,\dots,e_n)$ je báze $\mathbb{R}^n$ a nazývá se *kanonická* nebo také *standardní.*

(5) $(x^2,x,1)$ je báze $\mathbb{R}_2[x]$. ■

Tvrzení 10.3.1. *Každý konečněrozměrný vektorový prostor má bázi.*

Důkaz. Konečněrozměrný vektorový prostor má konečnou množinu generátorů. Ukážeme, že z ní lze vybrat lineárně nezávislou podmnožinu, která generuje stejný vektorový prostor a je tedy bází. Buď $\{v_1,\dots,v_n\}$ množina generátorů vektorového prostoru. Z této množiny vypusťme v_1, pokud $v_1 = 0$. Postupně pro $i = 2,\dots,n$ vypusťme vektor v_i, je-li lineární kombinací předchozích. Zbylé vektory nazvěme vybrané a označme je $u_1,\dots,u_m$. Je-li prvek množiny generátorů lineární kombinací ostatních prvků této množiny, jeho vypuštěním z množiny generátorů dostaneme opět množinu generátorů (ověřte). Proto vybrané vektory generují tentýž vektorový prostor.

Díky postupu při vybírání vektorů $u_1,\dots,u_m$ není žádný z nich lineární kombinací předchozích a množina $\{u_1,\dots,u_m\}$ je lineárně nezávislá. □

I nulový prostor $\{0\}$ má bázi. Je jí $\emptyset$, jelikož je lineárně nezávislá a $[\![\emptyset]\!] = \{0\}$.

Tvrzení 10.3.2. *Všechny báze jednoho konečněrozměrného vektorového prostoru mají stejný počet prvků.*

Důkaz. Buďte $(v_1,\dots,v_n)$ a $(u_1,\dots,u_m)$ báze vektorového prostoru V. Jelikož vektory $v_1,\dots,v_n$ generují V a $\{u_1,\dots,u_m\}$ je lineárně nezávislá množina, podle Tvrzení 10.2.5 $n \geq m$. Obdobně dostaneme, že $m \geq n$. Takže $n = m$. □

Definice. *Dimenze* vektorového prostoru je počet vektorů (libovolné) jeho báze. Vektorový prostor V dimenze n se nazývá n-*rozměrný*, zapisujeme $\dim V = n$. Nulový vektorový prostor $\{0\}$ se nazývá 0-*rozměrný*.

Příklad. (1) Vektorový prostor P^n nad polem P je n-rozměrný. Jednou z bází je n-tice (*kanonická báze*) $((1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1))$.

(2) Vektorový prostor $\mathbb{C}$ nad polem $\mathbb{R}$ je dvojrozměrný. Jednou z bází je dvojice $(1,i)$. Nad polem $\mathbb{C}$ je vektorový prostor samozřejmě jednorozměrný, jednu z bází tvoří vektor 1. Vidíme, že dva vektorové prostory mohou mít *různé* dimenze, přestože mají *stejné* množiny vektorů.

(3) Vektorový prostor $\mathbb{C}^n$ nad polem $\mathbb{R}$ je $2n$-rozměrný. Jednou z bází je $2n$-tice

$$\begin{aligned}
&((1,0,\dots,0),(i,0,\dots,0),\\
&(0,1,0,\dots,0),(0,i,0,\dots,0),\\
&\dots,\\
&(0,\dots,0,1),(0,\dots,0,i)).
\end{aligned}$$

■

Definice. (1) *Minimální množina generátorů* vektorového prostoru V je množina vektorů, která generuje V, ale žádná její vlastní podmnožina negeneruje V.

(2) *Maximální lineárně nezávislá množina vektorů* vektorového prostoru V je lineárně nezávislá množina vektorů z V, která není vlastní podmnožinou žádné lineárně nezávislé množiny.

Tvrzení 10.3.3. *Buďte $v_1,\dots,v_n \in V$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) $\{v_1,\dots,v_n\}$ je báze V;

(2) $\{v_1,\dots,v_n\}$ je minimální množina generátorů V;

(3) $\{v_1, \dots, v_n\}$ *je maximální lineárně nezávislá množina vektorů* V*.*

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2): Je-li $\{v_1, \dots, v_n\}$ báze, je to množina generátorů a žádný z nich není lineární kombinací ostatních. Tudíž žádná její vlastní podmnožina negeneruje V a $\{v_1, \dots, v_n\}$ je minimální množina generátorů.

(2) $\Rightarrow$ (1): $\{v_1, \dots, v_n\}$ je množina generátorů. Jelikož je minimální, žádný z jejích vektorů není lineární kombinací ostatních, takže je navíc lineárně nezávislá, čili báze.

(1) $\Rightarrow$ (3): Je-li $\{v_1, \dots, v_n\}$ báze, je lineárně nezávislá a každý vektor z V je lineární kombinací vektorů báze. Tudíž přidáním jakéhokoliv vektoru bychom dostali lineárně závislou množinu a tato je tedy maximální.

(3) $\Rightarrow$ (1): Množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá. Jelikož je maximální, po přidání dalšího vektoru, dostaneme lineárně závislou množinu a ten přidaný vektor (ty původní to být nemohou) je lineární kombinací předchozích. Jelikož i každý z vektorů v_i je jejich lineární kombinací, $\{v_1, \dots, v_n\}$ je navíc množina generátorů, čili báze. $\square$

Tvrzení poskytuje dvě alternativní definice báze, které se často používají. Má také důležité důsledky.

Důsledek. *Buď* V n*-rozměrný vektorový prostor. Pak*

(1) libovolná jeho n*-prvková lineárně nezávislá podmnožina tvoří bázi* V*;*
(2) libovolných n *jeho generátorů tvoří bázi* V*.*

Důkaz. (1) Prostor V má n-prvkovou množinu generátorů, takže podle Tvrzení 10.2.5 každá n-prvková lineárně nezávislá podmnožina je maximální, tedy báze.

(2) V prostoru V existuje n-prvková lineárně nezávislá množina, takže podle Tvrzení 10.2.5 každá n-prvková množina generátorů je minimální, tedy báze. $\square$

Důsledek. *Buď* $\{v_1, \dots, v_k\}$ *lineárně nezávislá podmnožina* n*-rozměrného vektorového prostoru* V*. Pak ji lze doplnit do báze* $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$*.*

Důkaz. V případě, že $v_1, \dots, v_k$ generují V, tvoří bázi. Jinak existuje vektor $v_{k+1} \in V$, který není lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_k$, načež množina $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ je lineárně nezávislá, protože v_{k+1} není lineární kombinací předchozích vektorů.

Opakováním téže úvahy získáme lineárně nezávislou množinu $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}\}$. Po $n-k$ opakováních budeme mít n-prvkovou lineárně nezávislou množinu, která bude bází podle předchozího důsledku. $\square$

10.4. Souřadnice

Tvrzení 10.4.1. *Buď* $(e_1, \dots, e_n)$ *báze vektorového prostoru* V*. Pak pro každý vektor* $v \in V$ *existuje právě jedna* n*-tice skalárů* $x^1, \dots, x^n \in P$ *taková, že* $v = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$*.*

Důkaz. Buď $v \in V$. Jelikož $e_1, \dots, e_n$ generují V, existují $x^1, \dots, x^n \in P$ takové, že $v = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$. Je-li $y^1, \dots, y^n$ libovolná n-tice taková, že $v = y^1 e_1 + \dots + y^n e_n$, pak

$$\begin{aligned} 0 = v - v &= (x^1 e_1 + \dots + x^n e_n) - (y^1 e_1 + \dots + y^n e_n) = \\ &= (x^1 - y^1) e_1 + \dots + (x^n - y^n) e_n. \end{aligned}$$

Z lineární nezávislosti množiny $\{e_1, \dots, e_n\}$ plyne $x^1 - y^1 = \dots = x^n - y^n = 0$, a tedy $x^1 = y^1$, ..., $x^n = y^n$. $\square$

Cvičení. Zformulujte a dokažte obrácené tvrzení. $\triangleright$

Definice. Skaláry $x^1, \dots, x^n$ z předchozího tvrzení se nazývají *souřadnice* vektoru v vzhledem k bázi $(e_1, \dots, e_n)$. Souřadnice budeme zapisovat buď jako prvky pole $x^1, \dots, x^n$ nebo jako uspořádanou n-tici $x = (x^1, \dots, x^n)$ nebo jako matici typu $n \times 1$

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Příklad. (1) Souřadnice vektoru $2 \in \mathbb{R}$ vzhledem k bázi (6) je $\frac{1}{3}$, protože $2 = \frac{1}{3} \cdot 6$.

(2) Souřadnice vektoru $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ v kanonické bázi jsou x, y, z, protože $(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1)$.

(3) Souřadnice vektoru $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ v bázi $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ jsou $x-y, y-z, z$, protože $(x, y, z) = (x - y) \cdot (1, 0, 0) + (y - z) \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (1, 1, 1)$.

(4) Souřadnice vektoru $z = a + bi \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ vzhledem k bázi $(1, i)$ jsou a, b, protože $z = a \cdot 1 + b \cdot i$.

Souřadnice vektoru $z = a + bi \in \mathbb{C}(\mathbb{C})$ vzhledem k bázi (1) je z, protože $z = z \cdot 1$. ■

Souřadnice vektoru závisí na volbě báze. Jeden vektor má v různých bázích různé souřadnice.

Buď V n-rozměrný vektorový prostor nad polem P. Buď $e = (e_1, \dots, e_n)$ nějaká báze V, nazvěme ji *stará báze.* Buď $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ jiná báze V, nazvěme ji *nová báze.* Buď $v \in V$ libovolný vektor. Souřadnice vektoru v ve staré bázi označme $x = (x^1, \dots, x^n) \in P^n$ a říkejme jim *staré souřadnice.* Souřadnice vektoru v v nové bázi označme $x' = (x'^1, \dots, x'^n) \in P^n$ a říkejme jim *nové souřadnice.* Platí tedy $v = \sum_i x^i e_i = \sum_i x'^i e'_i$. Zajímá nás vztah mezi starými a novými souřadnicemi x a x'.

Definice. Matice, jejíž sloupce jsou tvořeny novými souřadnicemi starých bázových vektorů, se nazývá *matice přechodu* od staré báze k nové bázi.

Tvrzení 10.4.2. *Buď $Q_{ee'}$ matice přechodu od staré báze e k nové bázi e' a buďte x a x' staré a nové souřadnice jednoho vektoru. Potom*

$$x' = Q_{ee'} \cdot x.$$

Důkaz. Buď $Q_{ee'} = (q^i_j)$ matice přechodu od staré báze e k nové bázi e' (u q^i_j horní index řádkový, dolní index je sloupcový). Tedy

$$e_i = \sum_j q^j_i e'_j.$$

Buď $v = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n \in V$. Potom

$$\begin{aligned} v &= x^1 \sum\nolimits_j q^j_1 e'_j + \dots + x^n \sum\nolimits_j q^j_n e'_j = \\ &= x^1(q^1_1 e'_1 + q^2_1 e'_2 + \dots + q^n_1 e'_n) + \dots + x^n(q^1_n e'_1 + q^2_2 e'_2 + \dots + q^n_n e'_n) = \\ &= \left(\sum\nolimits_j q^1_j x^j\right) e'_1 + \left(\sum\nolimits_j q^2_j x^j\right) e'_2 + \dots + \left(\sum\nolimits_j q^n_j x^j\right) e'_n. \end{aligned}$$

Tedy

$$x'^i = \sum_j q^i_j x^j \qquad \text{a} \qquad x' = Q_{ee'} \cdot x.$$ □

Příklad. (1) Mějme $\mathbb{R}$, starou bázi $e = (6)$ a novou bázi $e' = (1)$. Pro $v = 2$ je $x = (\frac{1}{3})$ a $x' = (2)$.

Matice přechodu od staré báze e k nové bázi e' je

$$Q_{ee'} = \left(6\right).$$

A skutečně

$$x' = (6) \cdot (\tfrac{1}{3}) = (2).$$

(2) Mějme $\mathbb{R}^2$, starou bázi $e = ((1,-1),(1,1))$ a novou bázi $e' = ((0,2),(2,1))$. Pro $v = (2,0)$ je $x = (1,1)$ a $x' = (-\frac{1}{2}, 1)$.

Matice přechodu od staré báze e k nové bázi e' je

$$Q_{ee'} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

A skutečně

$$x' = Q_{ee'} \cdot x = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$ ■

Tvrzení 10.4.3. *Buďte V vektorový prostor nad polem P, $e = (e_1, \dots, e_n)$ jeho báze, $u, v \in V$, $p \in P$, $x = (x^1, \dots, x^n)$ souřadnice vektoru u a $y = (y^1, \dots, y^n)$ souřadnice vektoru v. Pak $x + y = (x^1 + y^1, \dots, x^n + y^n)$ jsou souřadnice vektoru $u + v$ a $px = (px^1, \dots, px^n)$ jsou souřadnice vektoru pu.*

Důkaz. Cvičení. □