

Příklad. (1) Množina $\{7\} \subset \mathbb{R}$ je lineárně nezávislá. Je-li $x \cdot 7 = 0$ pro nějaké $x \in \mathbb{R}$, pak $x = 0$ (pro nenulové x uvedená rovnost $x \cdot 7 = 0$ neplatí).

(2) Množina $\{2, 3\} \subset \mathbb{R}$ je lineárně závislá. Lineární kombinace $x_1 \cdot 2 + x_2 \cdot 3$ může být rovna 0, ikdyž je některý z koeficientů x_1, x_2 nenulový, například $x_1 = 3, x_2 = -2$.

(3) Množina $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ je lineárně nezávislá. Lineární kombinace $x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1)$ je vektor (x, y, z) , který je roven $(0, 0, 0)$ právě tehdy, když $x = y = z = 0$ (ověřte).

(4) Množina $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ je lineárně nezávislá. Lineární kombinace $x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (1, 1, 1)$ je vektor $(x + y + z, y + z, z)$, který je roven $(0, 0, 0)$ právě tehdy, když $x = y = z = 0$ (ověřte).

(5) Množina $\{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (2, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ je lineárně závislá. Lineární kombinace $x \cdot (1, 0, -1) + y \cdot (0, 1, 2) + z \cdot (2, 1, 0)$ je vektor $(x + 2z, y + z, -x + 2y)$, který je roven $(0, 0, 0)$ i pro nenulové koeficienty x, y, z , například $x = 2, y = 1, z = -1$. Ověřte.

(6) Libovolná množina vektorů obsahující nulový vektor je lineárně závislá. Lineární kombinace $0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n + 1 \cdot 0$ je nulový vektor a přitom aspoň jeden koeficient je nenulový.

(7) Množina $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^m$, kde $v_i = (v_i^1, \dots, v_i^m)$, je lineárně nezávislá právě tehdy, když soustava

$$\begin{aligned} v_1^1 x^1 + v_2^1 x^2 + \dots + v_n^1 x^n &= 0 \\ v_1^2 x^1 + v_2^2 x^2 + \dots + v_n^2 x^n &= 0 \\ \vdots & \\ v_1^m x^1 + v_2^m x^2 + \dots + v_n^m x^n &= 0 \end{aligned}$$

má právě jedno řešení, a to sice $x^1 = x^2 = \dots = x^n = 0$.

(8) Množina $\{x^2, x, 1\} \subset \mathbb{R}_2[x]$ je lineárně nezávislá. Ověřte.

(9) Prázdná množina je lineárně nezávislá, protože všechny koeficienty z prázdné množiny koeficientů jsou nulové. ■

Cvičení. (1) Libovolná podmnožina lineárně nezávislé množiny vektorů je lineárně nezávislá. Dokažte.

(2) Jednoprvková množina $\{v\} \subset V$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když $v \neq 0$. Dokažte. ▷

Tvrzení 10.2.1. Množina vektorů $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně závislá právě tehdy, když aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních, tj. právě když existuje index i takový, že vektor v_i je lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$.

Důkaz. „ \Rightarrow “ Předpokládejme, že množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně závislá, tedy že existují koeficienty a_1, \dots, a_n takové, že aspoň jeden z nich je nenulový (například a_i) a $a_1 v_1 + \dots + a_i v_i + \dots + a_n v_n = 0$. Potom

$$v_i = -\frac{a_1}{a_i} v_1 - \dots - \frac{a_{i-1}}{a_i} v_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i} v_{i+1} - \dots - \frac{a_n}{a_i} v_n,$$

a vektor v_i je tedy lineární kombinací ostatních.

„ \Leftarrow “ Nechť vektor v_i je lineární kombinací vektorů $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$, tedy existují koeficienty $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ takové, že

$$v_i = a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \dots + a_n v_n.$$

Potom

$$a_1v_1 + \dots + a_{i-1}v_{i-1} - v_i + a_{i+1}v_{i+1} + \dots + a_nv_n = 0$$

s nenulovým koeficientem (-1) u vektoru v_i . Tedy, množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně závislá. \square

Tvrzení 10.2.2. Množina vektorů $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně závislá právě tehdy, když aspoň jeden z nich je lineární kombinací předchozích, tj. právě když existuje index i takový, že vektor v_i je lineární kombinací vektorů v_1, \dots, v_{i-1} .

Důkaz. „ \Rightarrow “ Postupujeme jako v důkazu předchozího tvrzení, jen nenulový koeficient a_i vybereme s nejvyšším možným indexem. To znamená, že $a_{i+1} = \dots = a_n = 0$ a zbytek je zřejmý.

Jako cvičení rozeberte podrobně případ $i = 1$, kdy bude množina předcházejících vektorů prázdná.

„ \Leftarrow “ Tvrzení je speciálním případem předchozího. \square

Definice. Elementární úprava n -tice vektorů $v_1, \dots, v_n \in V(P)$ je:

- (i) vynásobení i -tého vektoru nenulovým skalárem c ;
- (ii) přičtení c -násobku j -tého vektoru k i -tému;
- (iii) výměna i -tého vektoru s j -tým.

Při tom vznikají po řadě n -tice

$$\begin{aligned} &(v_1, \dots, v_{i-1}, cv_i, v_{i+1}, \dots, v_n), \\ &(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + cv_j, v_{i+1}, \dots, v_j, \dots, v_n), \\ &(v_1, \dots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Ke každé z těchto úprav existuje úprava inverzní, která je rovněž elementární a stejného typu (ověřte).

Definice. Dvě n -tice vektorů jsou *ekvivalentní*, jestliže jedna vznikne z druhé konečnou posloupností elementárních úprav.

Cvičení. Ukažte, že právě zavedená relace mezi n -ticemi vektorů je reflexivní, symetrická a tranzitivní. \triangleright

Příklad. Mějme matici typu $m \times n$ nad polem P . Její řádky jsou uspořádané n -tice prvků pole P , tj. vektory z prostoru P^n . Celá matice je pak m -tice takových n -tic, tedy m -tici vektorů z prostoru P^n . Elementární úpravy této m -tice vektorů jsou právě elementární řádkové úpravy dané matice. \blacksquare

Tvrzení 10.2.3. Necht' je n -tice $u_1, \dots, u_n \in V$ ekvivalentní s n -ticí $v_1, \dots, v_n \in V$. Pak vektory u_1, \dots, u_n generují V právě tehdy, když vektory v_1, \dots, v_n generují V .

Důkaz. Necht' lze získat n -tici v_1, \dots, v_n z n -tice u_1, \dots, u_n jednou z elementárních úprav, vybereme si úpravu druhého typu, tedy $v_i = u_i + cu_j$ a $v_k = u_k$ pro $k \neq i$.

Předpokládejme, že v_1, \dots, v_n generují V . Pro libovolný vektor $w \in V$ tedy existují koeficienty p_1, \dots, p_n takové, že $w = p_1v_1 + \dots + p_nv_n$. Pak

$$\begin{aligned} w &= p_1u_1 + \dots + p_i(u_i + cu_j) + \dots + p_ju_j + \dots + p_nu_n = \\ &= p_1u_1 + \dots + p_iu_i + \dots + (p_j + cp_i)u_j + \dots + p_nu_n \end{aligned}$$

je lineární kombinace vektorů u_1, \dots, u_n .

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, neboť n -tice u_1, \dots, u_n vzniká z n -tice v_1, \dots, v_n inverzní úpravou, která je stejného typu.

Pro ostatní úpravy obdobně a výsledek platí i pro libovolnou konečnou posloupnost elementárních úprav. \square

Tvrzení 10.2.4. *Nechť je n -tice $u_1, \dots, u_n \in V$ ekvivalentní s n -ticí $v_1, \dots, v_n \in V$. Pak množina $\{u_1, \dots, u_n\}$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když množina $\{v_1, \dots, v_n\}$ je lineárně nezávislá.*

Důkaz. Nechť lze získat n -tici v_1, \dots, v_n z n -tice u_1, \dots, u_n jednou z elementárních úprav, vybereme si úpravu druhého typu, tedy $v_i = u_i + cu_j$ a $v_k = u_k$ pro $k \neq i$.

Předpokládejme, že $\{u_1, \dots, u_n\}$ je lineárně nezávislá. Buďte $x_1, \dots, x_n \in P$ takové, že $x_1v_1 + \dots + x_nv_n = 0$. Pak

$$\begin{aligned} 0 &= x_1v_1 + \dots + x_nv_n = x_1u_1 + \dots + x_i(u_i + cu_j) + \dots + x_ju_j + \dots + x_nu_n = \\ &= x_1u_1 + \dots + x_iu_i + \dots + (x_j + cx_i)u_j + \dots + x_nu_n. \end{aligned}$$

Z lineární nezávislosti množiny $\{u_1, \dots, u_n\}$ vyplývá, že všechny koeficienty poslední lineární kombinace jsou nulové, tj. $x_1 = \dots = x_i = \dots = x_j + cx_i = \dots = x_n = 0$. Z toho dostaneme, že i $x_j = 0$.

Opačná implikace vyplývá z právě dokázané, neboť n -tice u_1, \dots, u_n vzniká z n -tice v_1, \dots, v_n inverzní úpravou, která je stejného typu.

Pro ostatní úpravy obdobně a výsledek platí i pro libovolnou konečnou posloupnost elementárních úprav. \square

Tvrzení 10.2.5. *Nechť vektory v_1, \dots, v_n generují prostor V a $\{u_1, \dots, u_m\} \subset V$ je lineárně nezávislá. Pak $m \leq n$.*

Důkaz. Každý z vektorů u_1, \dots, u_m je lineární kombinací vektorů v_1, \dots, v_n , takže pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ existují koeficienty a_i^1, \dots, a_i^n takové, že $u_i = a_i^1v_1 + \dots + a_i^nv_n$. Matici

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & \dots & a_m^n \end{pmatrix}$$

upravme pomocí řádkových elementárních úprav na matici A' ve schodovitém tvaru. Provedeme-li stejné elementární úpravy s m -ticí u_1, \dots, u_m , dostaneme ekvivalentní m -tici u'_1, \dots, u'_m . Lineární kombinace vektorů v_1, \dots, v_n s koeficienty z jednotlivých řádků matice A' jsou rovny právě vektorům u'_1, \dots, u'_m . Z lineární nezávislosti množiny $\{u_1, \dots, u_m\}$ plyne lineární nezávislost množiny $\{u'_1, \dots, u'_m\}$ a také lineární nezávislost, tedy i nenulovost řádků matice A' . Jelikož A' je ve schodovitém tvaru a všechny řádky má nenulové, nemůže mít více řádků než sloupců, tedy $m \leq n$.

Tvrzení je také součástí Tvrzení 10.2.7. \square