10. Vektorové prostory

10.1. Definice, příklady, základní vlastnosti

Definice. Buď V neprázdná množina, P pole. *Vektorový prostor V nad polem P* je množina V spolu s binární operací $+\colon V \times V \to V$, $(u,v) \mapsto u+v$, a zobrazením $\cdot\colon P \times V \to V$, $(p,v) \mapsto p \cdot v$, takovými, že

(1) pro každé $u,v,w \in V$ platí $(u+v)+w = u+(v+w)$,
(2) existuje $0 \in V$ takový, že pro každé $v \in V$ platí $v+0=v$,
(3) pro každé $v \in V$ existuje $-v \in V$ takové, že $v+(-v)=0$,
(4) pro každé $u,v \in V$ platí $u+v=v+u$,
(5) pro každé $v \in V$ platí $1 \cdot v = v$,
(6) pro každé $p,q \in P$ a $v \in V$ platí $(p \cdot q) \cdot v = p \cdot (q \cdot v)$,
(7) pro každé $p,q \in P$ a $v \in V$ platí $(p+q) \cdot v = (p \cdot v)+(q \cdot v)$,
(8) pro každé $p \in P$ a $u,v \in V$ platí $p \cdot (u+v) = (p \cdot u)+(p \cdot v)$.

Prvky množiny V jsou *vektory*, prvky pole P jsou *skaláry*. Binární operace $+$ se nazývá *sčítání*, zobrazení $\cdot$ se nazývá *násobení skalárem*, prvek $0 \in V$ je *nulový vektor* nebo *nula*, prvek $-v$ se nazývá *opačný* k prvku v.

Podmínky (1)–(8) se nazývají *axiomy vektorového prostoru*. První čtyři znamenají, že V s operací $+$ je komutativní grupa.

Při násobení vektoru skalárem píšeme skalár vždy vlevo od vektoru. Vektorový prostor nad polem $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$ se nazývá *reálný*, resp. *komplexní* vektorový prostor.

Zobrazení $\cdot\colon P \times V \to V$, $(p,v) \mapsto p \cdot v$, není binární operace (není-li $P = V$). Toto zobrazení se obvykle nazývá vnější operace (binární operace se pak může nazývat vnitřní operace). Na vektorovém prostoru tak máme vnitřní operaci sčítání a vnější operaci násobení skalárem.

Vektorový prostor V nad polem P se také označuje $V(P)$.

Příklad. (1) Reálný vektorový prostor Eukleidovské geometrie, dvojrozměrné i trojrozměrné. Vektor je reprezentován orientovanou úsečkou nebo uspořádanou dvojicí bodů (počáteční bod, koncový bod). Dvě takové reprezentace považujeme za totožné, lze-li jednu převést na druhou rovnoběžným posunutím. *Úmístění* vektoru v daném bodě X dostaneme rovnoběžným posunutím, při kterém počáteční bod vektoru splyne s X. (Cvičení: Vektor je třída jisté relace ekvivalence. Které?)

Součet vektorů získáme pravidlem rovnoběžníka, p-násobek vektoru p-násobným prodloužením úsečky (případně se změnou orientace, když $p < 0$). Nulový vektor je degenerovaná úsečka nulové délky. Vektorový prostor vektrorů v rovině resp. prostoru označíme E^2 resp. E^3.

Cvičení. Demonstrujte asociativitu sčítání vektorů v E^3. Zvolte tři vektory u,v,w v prostoru, umístěte je do společného bodu a doplňte do kosého hranolu. Ukažte, že vektor $(u+v)+w$ tvoří úhlopříčku tohoto hranolu. Totéž pro $u+(v+w)$. ▷

(2) Buď V jednoprvková množina, P pole. Jediný prvek množiny V označme 0 a položme $0+0=0$, $-0=0$ a $p \cdot 0 = 0$ pro každé $p \in P$. Dostáváme vektorový prostor nazývaný *nulový prostor* nebo také *triviální prostor*.

(3) Každé pole je vektorový prostor nad sebou samým. Položíme-li v definici vektorového prostoru $V = P$, budou všechny axiomy vektorového prostoru důsledky axiomů

pole (ověřte). Získáváme tak například vektorový prostor $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{R}$, vektorový prostor $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$, vektorový prostor $\mathbb{Q}$ nad $\mathbb{Q}$ a vektorový prostor $\mathbb{Z}_2$ nad $\mathbb{Z}_2$.

(4) Každé pole je vektorový prostor nad libovolným svým podpolem. Jediný rozdíl oproti předchozímu příkladu spočívá v tom, že násobení skalárem je dovoleno jen pro skaláry z podpole.

(5) Buď $n \in \mathbb{N}$, P pole. Na množině P^n všech uspořádaných n-tic prvků P zaveďme sčítání a násobení skalárem předpisem

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n),$$
$$p(u_1, u_2, \dots, u_n) = (pu_1, pu_2, \dots, pu_n).$$

Vzniká vektorový prostor P^n nad polem P (ověřte). Například řádky a sloupce matic jsou prvky takových vektorových prostorů.

(6) Vektorový prostor P^n nad podpolem $Q \subset P$.

(7) Vektorový prostor matic typu $m \times n$ nad polem P s operacemi sčítání a násobení skalárem. Značí se $P^{m\times n}$ nebo $\mathcal{M}_{m\times n}(P)$ (resp. $\mathcal{M}_m(P)$ nebo $\mathrm{gl}(m, P)$ v případě čtvercových matic).

(8) Vektorový prostor polynomů stupně nejvýše n nad polem P s operacemi sčítání a násobení skalárem.

(9) Vektorový prostor polynomů nad polem P s operacemi sčítání a násobení skalárem.

(10) Vektorový prostor všech řešení homogenní soustavy rovnic.

(11) Buď X množina, P pole. Na množině P^X všech zobrazení $X \to P$ zaveďme sčítání a násobení skalárem předpisem

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x),$$
$$(pu)(x) = p \cdot u(x).$$

Vzniká vektorový prostor P^X nad polem P (ověřte). Speciální případy jsou množina všech funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, množina všech spojitých funkcí na $\mathbb{R}$, množina diferencovatelných funkcí na $\mathbb{R}$, množina všech spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$. ■

Tvrzení 10.1.1. *Buď V vektorový prostor nad polem P. Pak pro každé $u, v \in V$, $p, q \in P$ platí*

(i) $0 \cdot v = 0,$
(ii) $(-1) \cdot v = -v,$
(iii) $(p - q) \cdot v = p \cdot v - q \cdot v,$
(iv) $p \cdot (u - v) = p \cdot u - p \cdot v,$
(v) Je-li $p \cdot v = 0$, pak buď $p = 0$ nebo $v = 0$.

Důkaz. Cvičení. □

10.2. Lineární kombinace, generátory, lineární nezávislost

Definice. Buď V vektorový prostor nad polem P.

(1) Buďte $n \in \mathbb{N}$, $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ a $p_1, p_2, \dots, p_n \in P$. *Lineární kombinace* vektorů $v_1, v_2, \dots, v_n$ s koeficienty $p_1, p_2, \dots, p_n$ je vektor

$$p_1 v_1 + p_2 v_2 + \cdots + p_n v_n \in V.$$

Pro $n = 0$ definujeme lineární kombinaci prázdné množiny vektorů jako nulový vektor $0 \in V$.

(2) Buď $U \subset V$. *Lineární obal* množiny U je množina $[\![U]\!]$ všech lineárních kombinací konečně mnoha vektorů množiny U. Pro $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ je

$$[\![U]\!] = [\![u_1, u_2, \dots, u_n]\!] = \{p_1u_1 + p_2u_2 + \dots + p_nu_n |\ p_1, p_2, \dots, p_n \in P\}.$$

Lineární obal prázdné množiny je $[\![\emptyset]\!] = \{0\}$.

(3) Vektory $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ *generují* V, je-li každý vektor $v \in V$ jejich lineární kombinací, to jest, jestliže pro každý vektor $v \in V$ existují skaláry $p_1, p_2, \dots, p_n \in P$ takové, že $v = p_1v_1 + p_2v_2 + \dots + p_nv_n$, to jest, jestliže $[\![v_1, v_2, \dots, v_n]\!] = V$. Potom $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ je *množina generátorů* prostoru V.

(4) Prostor, který má konečnou množinu generátorů, se nazývá *konečněrozměrný*.

Příklad. (1) Součet vektorů u, v je jejich lineární kombinace s koeficienty $1, 1$. Opačný vektor k v je jeho lineární kombinace (skalární násobek) s koeficientem -1:

$$u + v = 1 \cdot u + 1 \cdot v, \quad -v = (-1) \cdot v.$$

(2) Lineární kombinace vektorů $1, 6 \in \mathbb{R}$ s koeficienty $3, 1 \in \mathbb{R}$ je $3 \cdot 1 + 1 \cdot 6 = 9$.

(3) Lineární kombinace vektorů $(1, 2, 0), (2, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ s koeficienty $-3, 2 \in \mathbb{R}$ je

$$(-3) \cdot (1, 2, 0) + 2 \cdot (2, 3, 1) = (1, 0, 2).$$

■

Příklad. (1) Prostor $\mathbb{R}^3$ je generován vektory $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Skutečně, libovolný vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ je jejich lineární kombinací s koeficienty x, y, z:

$$(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1).$$

(2) Prostor $\mathbb{R}^3$ je generován vektory $(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$. Skutečně, libovolný vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ je jejich lineární kombinací s koeficienty $x - y, y - z, z$:

$$(x, y, z) = (x - y) \cdot (1, 0, 0) + (y - z) \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (1, 1, 1).$$

(3) Prostor $\mathbb{R}^3$ je generován vektory $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (3, 4, 5)$. Libovolný vektor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ je jejich lineární kombinací s koeficienty $x, y, z, 0$:

$$(x, y, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1) + 0 \cdot (3, 4, 5).$$

V tomto případě můžeme najít dokonce nekonečně mnoho vyjádření ve tvaru lineární kombinace, pro libovolný parametr $t \in \mathbb{R}$ platí

$$(x, y, z) = (x - 3t) \cdot (1, 0, 0) + (y - 4t) \cdot (0, 1, 0) + (z - 5t) \cdot (0, 0, 1) + t \cdot (3, 4, 5).$$

(4) Prostor $\mathbb{R}^3$ není generován vektory $(1, 2, 0), (3, 4, 0), (5, 6, 0)$. Ověřte.

(5) Vektory $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$, kde $v_i = (v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^m)$, generují $\mathbb{R}^m$, jestliže soustava

$$\begin{aligned}
&v_1^1x^1 + v_2^1x^2 + \dots + v_n^1x^n = v^1\\
&v_1^2x^1 + v_2^2x^2 + \dots + v_n^2x^n = v^2\\
&\vdots\\
&v_1^mx^1 + v_2^mx^2 + \dots + v_n^mx^n = v^m
\end{aligned}$$

o neznámých $x^1, x^2, \dots, x^n$ má řešení pro každou pravou stranu $v^1, v^2, \dots, v^m$. Soustava je totiž ekvivalentní s podmínkou

$$x^1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ \vdots \\ v_1^m \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \\ \vdots \\ v_2^m \end{pmatrix} + \dots + x^n \begin{pmatrix} v_n^1 \\ v_n^2 \\ \vdots \\ v_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^m \end{pmatrix}.$$

(6) Prostor $\mathbb{R}_2[x]$ polynomů neurčité x s reálnými koeficienty stupně nejvýše 2 je generován vektory $x^2, x + 1, 1$. Ověřte. ■

Příklad. Vektorový prostor $\mathbb{R}[x]$ všech polynomů s reálnými koeficienty není konečněrozměrný. Pro libovolné $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}[x]$ existuje přirozené číslo m, které je větší než stupeň kteréhokoliv z polynomů $p_1, \dots, p_n$. Pak polynom $x^m \in \mathbb{R}[x]$ není lineární kombinací polynomů $p_1, \dots, p_n$, takže polynomy $p_1, \dots, p_n$ negenerují $\mathbb{R}[x]$. ■

Cvičení. (1) Jestliže $v_1, \dots, v_n$ generují V a v_i je lineární kombinací ostatních, pak $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ také generují V. Dokažte.

(2) Nechť každý z vektorů $v_1, \dots, v_n$ je lineární kombinace vektorů $u_1, \dots, u_m \in V$. Jestliže $v_1, \dots, v_n$ generují V, pak $u_1, \dots, u_m$ také generují V. Dokažte. ▷

Definice. Buď V vektorový prostor nad polem P.

(1) Množina vektorů $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ je *lineárně nezávislá*, jestliže z rovnosti

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = 0, \text{ kde } x_1, x_2, \dots, x_n \in P,$$

plyne $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

(2) Množina vektorů $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ je *lineárně závislá*, jestliže není lineárně nezávislá.

Často se zjednodušeně a nepřesně říká, že nějaké vektory jsou lineárně (ne)závislé. Myslí se tím, že příslušná množina vektorů je lineárně (ne)závislá. Možná se s tímto nepřesným vyjádřením setkáme i v tomto textu.