

6. GRUPY

6.1. Binární operace

Binární operace na množině X je libovolné zobrazení $X \times X \rightarrow X$.

Jedná se tedy o zobrazení, které libovolné dvojici (x, y) prvků z X přiřazuje nějaký jednoznačně určený prvek z X . Binární operace se často označují symboly $*$, $+$, \cdot , \circ a hodnota takového zobrazení označeného například $*$ v bodě (x, y) se označuje $x * y$ (místo $*(x, y)$).

Příklad. (1) Buď $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ množina všech přirozených (celých nezáporných) čísel. Zobrazení $+: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, které uspořádané dvojici $(x, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ přirozených čísel přiřadí jejich součet $x + y \in \mathbb{N}_0$, je binární operace na \mathbb{N}_0 .

(2) Součet nebo součin na množinách $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

(3) Na konečné množině lze zadat binární operaci tabulkou. Například nechť $X = \{0, 1, 2\}$ a binární operace $+$ na X je zadána takto

$$\begin{array}{c|ccc} + & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{tedy například } 1 + 2 = 0.$$

(4) Množina $\mathcal{M}_{m \times n}(P)$ matic stejného typu s operací sčítání matic.

(5) Množina $\mathcal{M}_n(P)$ čtvercových matic stejného typu s operací násobení matic.

(6) Množina $P[x]$ všech polynomů s operací sčítání nebo násobení polynomů.

(7) Množina X^X všech zobrazení $X \rightarrow X$ s operací \circ skládání zobrazení. ■

Binární operace $*$ na množině X je *asociativní*, jestliže pro každé $x, y, z \in X$ platí

$$x * (y * z) = (x * y) * z.$$

Můžeme tedy psát bez závorek $x * y * z$.

Binární operace $*$ na množině X je *komutativní*, jestliže pro každé $x, y \in X$ platí

$$x * y = y * x.$$

Příklad. (1) Sčítání i násobení na množinách $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ jsou asociativní i komutativní.

(2) Sčítání matic na množině $\mathcal{M}_{m \times n}(P)$ je asociativní i komutativní.

(3) Násobení matic na množině $\mathcal{M}_n(P)$ je asociativní, ale není komutativní.

(4) Sčítání i násobení polynomů na množině $P[x]$ jsou asociativní i komutativní.

(5) Skládání zobrazení na množině X^X je asociativní. Komutativní je právě tehdy, když X je jednoprvková množina (cvičení). ■

Buď $*$ binární operace na množině X . Prvek $e \in X$ je *neutrální prvek* operace $*$, jestliže pro každý prvek $x \in X$ platí

$$x * e = x = e * x.$$

Tvrzení 6.1.1. *Každá binární operace má nejvýše jeden neutrální prvek.*

Důkaz. Jsou-li e_1, e_2 neutrální prvky operace $*$, pak $e_2 = e_1 * e_2 = e_1$. □

- Příklad.** (1) Neutrální prvek operace sčítání na množinách $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ je 0.
 (2) Neutrální prvek operace násobení na množinách $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ je 1.
 (3) Neutrální prvek operace sčítání matic na množině $\mathcal{M}_{m \times n}(P)$ je nulová matice příslušného typu, tedy $0_{m \times n}$.
 (4) Neutrální prvek operace násobení matic na množině $\mathcal{M}_n(P)$ je jednotková matice příslušného typu, tedy E_n .
 (5) Neutrální prvek operace sčítání polynomů na množině $P[x]$ je polynom 0.
 (6) Neutrální prvek operace násobení polynomů na množině $P[x]$ je polynom 1.
 (7) Neutrální prvek operace skládání zobrazení na množině X^X je identita id_X . ■

Buď $*$ binární operace na množině X , $e \in X$ její neutrální prvek. Prvek $x \in X$ je *invertibilní*, jestliže existuje prvek $y \in X$ takový, že

$$x * y = y * x = e.$$

Potom y je *inverzní prvek* k prvku x vzhledem k operaci $*$.

Tvrzení 6.1.2. *Každý prvek množiny s asociativní binární operací má vzhledem k této operaci nejvýše jeden inverzní prvek.*

Důkaz. Je-li e neutrální prvek operace $*$ a jsou-li y_1, y_2 inverzní prvky k prvku x , pak

$$y_1 = y_1 * e = y_1 * (x * y_2) = (y_1 * x) * y_2 = e * y_2 = y_2. \quad \square$$

Inverzní prvek k prvku x se obvykle značí x^{-1} . Pouze u operace $+$ se značí $-x$ a říká se mu *opačný*.

Přímo z definice inverzního prvku vyplývá, že

$$e^{-1} = e \quad \text{a} \quad (x^{-1})^{-1} = x.$$

- Příklad.** (1) Inverzní prvek k číslu x vzhledem k operaci sčítání na množinách $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ je číslo opačné $-x$ (pokud v příslušné množině existuje).
 (2) Inverzní prvek k číslu x vzhledem k operaci násobení na množinách $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ je převrácená hodnota x^{-1} (pokud v příslušné množině existuje).
 (3) Inverzní prvek k matici A vzhledem k operaci sčítání matic na množině $\mathcal{M}_{m \times n}(P)$ je opačná matice $-A$.
 (4) Inverzní prvek k matici A vzhledem k operaci násobení matic na množině $\mathcal{M}_n(P)$ je inverzní matice A^{-1} (je-li A invertibilní). ■

6.2. Grupy

Množina G s binární operací $*$: $G \times G \rightarrow G$ je *grupa*, jestliže

- (1) operace $*$ je asociativní,
- (2) v množině G je neutrální prvek operace $*$,
- (3) množina G s každým prvkem obsahuje také prvek k němu inverzní vzhledem k operaci $*$.

Je-li navíc operace $*$ komutativní, grupa G se také nazývá *komutativní*.

Grupa G s binární operací $*$, neutrálním prvkem e a označením inverzního prvku $^{-1}$ se někdy zapisuje $(G, *, e, ^{-1})$, někdy jen $(G, *)$ a je-li z kontextu zřejmé, o jakou operaci se jedná, někdy se hovoří jen o grupě G .

Grupa s binární operací označenou $+$ se nazývá *aditivní* (používá se pouze u komutativních grup). Grupa s binární operací označenou \cdot se nazývá *multiplikativní*.

Označme $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ a obdobně v případech $\mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$.

Příklad. (1) Množina \mathbb{Z} s operací sčítání je grupa. Stejně tak $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

(2) Množina \mathbb{N}_0 s operací sčítání není grupa.

(3) Množina \mathbb{Q}^* s násobením je grupa. Stejně tak $\mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*, \mathbb{R}_+$ (kladná reálná čísla).

(4) Množina $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ s operací násobení není grupa. Stejně tak $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

(5) Množina $\mathcal{M}_{m \times n}(P)$ s operací sčítání matic je grupa.

(6) Množina $\mathcal{M}_n(P)$ s operací násobení matic není grupa.

(7) Množina $GL_n(P)$ invertibilních matic typu $n \times n$ s operací násobení matic je grupa (nazývá se *obecná lineární grupa*). ■

Tvrzení 6.2.1. *Buď $(G, *, e, ^{-1})$ grupa. Pak pro libovolná $x, y \in G$ platí:*

- (1) *Jestliže $x * y = e$, pak $y = x^{-1}$, $x = y^{-1}$.*
- (2) *$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.*

Důkaz. (1) Jestliže $x * y = e$, pak $y = e * y = x^{-1} * x * y = x^{-1} * e = x^{-1}$. Podobně druhá rovnost (cvičení).

(2) Plyne z (1) a rovnosti $x * y * y^{-1} * x^{-1} = e$. □

6.3. Podgrupy

Buď $(X, *, e, ^{-1})$ grupa, buď $Y \subset X$ podmnožina taková, že

- (1) jestliže $y_1, y_2 \in Y$, pak $y_1 * y_2 \in Y$;
- (2) $e \in Y$;
- (3) jestliže $y \in Y$, pak $y^{-1} \in Y$.

Potom Y je *podgrupa* grupy X .

Vlastnosti (1) se někdy říká *uzavřenost množiny vzhledem k operaci*, vlastnosti (3) *uzavřenost množiny vzhledem k inverzím*.

Každá podgrupa je grupa.

Příklad. (1) Každá grupa $(X, *, e, ^{-1})$ má podgrupy X a $\{e\}$. Tyto podgrupy se nazývají *triviální* podgrupy.

(2) Aditivní podgrupy $(\mathbb{Z}, +, 0, -) \subset (\mathbb{Q}, +, 0, -) \subset (\mathbb{R}, +, 0, -) \subset (\mathbb{C}, +, 0, -)$.

- (3) Multiplikatívni podgrupy $(\mathbb{Q}^*, \cdot, 1, ^{-1}) \subset (\mathbb{R}^*, \cdot, 1, ^{-1}) \subset (\mathbb{C}^*, \cdot, 1, ^{-1})$.
- (4) Množina $\{-1, 1\}$ je podgrupa multiplikatívni grupy \mathbb{R}^* .
- (5) Množina $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ je podgrupa multiplikatívni grupy \mathbb{C}^* . ■

Tvrzení 6.3.1. (1) *Budte X grupa, Y podgrupa X a Z podgrupa Y . Pak Z je podgrupa X .*

(2) *Budte X grupa a Y, Z její podgrupy. Pak $Y \cap Z$ je podgrupa X .*

Důkaz. Cvičení. □

Cvičení. Pokud průnik prázdného systému podmnožin množiny X je množina X , potom průnik libovolného systému podgrup grupy X je podgrupa grupy X . ▷

6.4. Podgrupy aditivní grupy \mathbb{Z}

Najdeme všechny podgrupy aditivní grupy $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, 0, -)$. Pro přirozené číslo $m \in \mathbb{N}_0$ označme

$$m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -2m, -m, 0, m, 2m, \dots\}.$$

Tvrzení 6.4.1. *Množiny $m\mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}_0$, jsou podgrupy aditivní grupy \mathbb{Z} a jiné podgrupy v \mathbb{Z} nejsou.*

Důkaz. Buď $m \in \mathbb{N}_0$ libovolné. Ukážeme, že $m\mathbb{Z}$ je podgrupa. Pro libovolné $mk, ml \in m\mathbb{Z}$ platí $mk + ml = m(k + l) \in m\mathbb{Z}$, čímž je dokázána uzavřenost množiny $m\mathbb{Z}$ na sčítání. Množina $m\mathbb{Z}$ obsahuje neutrální prvek 0 grupy \mathbb{Z} . Nakonec, pro libovolné $mk \in m\mathbb{Z}$ platí $-(mk) = m(-k) \in m\mathbb{Z}$, čímž je dokázána uzavřenost množiny $m\mathbb{Z}$ na inverzní (opačné) prvky.

Ukážeme, že každá podgrupa $B \subset \mathbb{Z}$ je rovna některé podgrupě $m\mathbb{Z}$. Jelikož B je podgrupa, obsahuje neutrální prvek 0. Pokud $B = \{0\}$, pak $B = 0\mathbb{Z}$ ($m = 0$). Předpokládejme, že $B \neq \{0\}$, tedy existuje nenulové číslo $b \in B$. Navíc existuje kladné číslo $b_+ \in B$, buď $b_+ = b$, nebo $b_+ = -b$ ($-b \in B$, protože B je podgrupa). Označme m nejmenší kladné číslo v B (v každé neprázdné množině kladných celých čísel existuje nejmenší číslo).

Dokážeme, že toto číslo m je hledané číslo, pro něž $B = m\mathbb{Z}$. Nejdříve ukážeme, že $m\mathbb{Z} \subset B$. Již víme, že $0 \in B$ a $m \in B$. Matematickou indukcí se snadno dokáže, že $mk = m(k - 1) + m \in B$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. A potom i inverzní prvky $-mk$ leží v B , a tím je ukázáno, že všechny prvky množiny $m\mathbb{Z}$ leží v B .

Zbývá dokázat, že $B \subset m\mathbb{Z}$. Buď $b \in B$ libovolné a předpokládejme, že $b \notin m\mathbb{Z}$. Pak existují $q, r \in \mathbb{Z}$ taková, že

$$0 < r < m \quad \text{a} \quad b = mq + r.$$

Potom $r = b - mq = b + m(-q)$ je kladný prvek B , menší než m , což je v rozporu s definicí prvku m . Proto $b \in m\mathbb{Z}$. □